



## Lista de Exercícios Resolvidos 7

# Biomecânica de Fluidos

Lucas Monteiro Nogueira

### ■ Problemas

1. Verdadeiro/Falso Rápido
2. Estrutura da Parede de Vasos Sanguíneos
3. Envelhecimento de Artérias
4. Índice Cardíaco
5. Circulação em Ratos e Humanos
6. Análise de uma Estenose
7. Análise de uma Bifurcação
8. Ondas de Pressão em uma Bifurcação
9. Medindo a Complacência
10. Escoamento Pulsátil em um Conduto Cilíndrico
11. Relação Pressão-Vazão em um Fluido de Casson
12. Modelo Windkessel
13. Índice de Desempenho de uma Válvula
14. Concentração de Oxigênio no Sangue
15. Modelo Krogh de Difusão de  $O_2$
16. Transferência de Massa por Difusão I
17. Transferência de Massa por Difusão II
18. Transferência de Massa por Difusão III
19. Transferência de Massa por Difusão IV



### ■ Problema 1

Acerca da teoria de biomecânica de fluidos, julgue os itens a seguir.

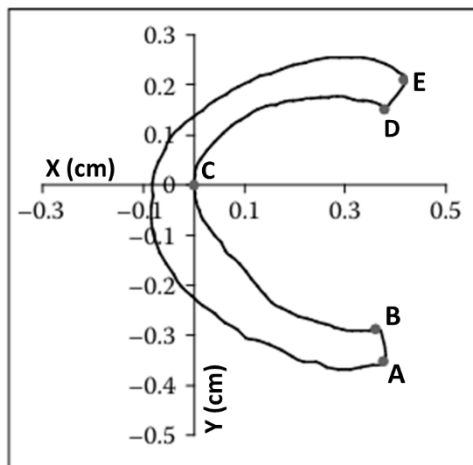
**1.( )** Considere um segmento de aorta com 10 cm de comprimento e diâmetro médio de 2.5 cm. Observa-se que o diâmetro cresce em 8% quando o segmento é submetido a um pulso de pressão com amplitude 40 mmHg. Assim sendo, podemos afirmar que a complacência do segmento aórtico é maior que  $2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$ .

**2.( )** Um vaso pai de raio igual a 525  $\mu\text{m}$  divide-se em dois segmentos filhos, um com raio 400  $\mu\text{m}$  e o outro com 435  $\mu\text{m}$ . Supondo que a lei de Murray é aplicável a essa bifurcação, podemos afirmar que exatamente um dos dois ângulos de bifurcação que descrevem esse sistema é superior a 45 graus.

**3.( )** Um fluxo sanguíneo permanente escoar em um vaso com diâmetro 1.0 cm e velocidade média 50 cm/sec. A pressão média no vaso é 100 mmHg. Supondo que o sangue adentra um segmento estenótico onde o diâmetro é apenas 0.6 cm, podemos afirmar que a pressão na região do estrangulamento é maior que 80 mmHg.

**4.( )** Um vaso sanguíneo de 100  $\mu\text{m}$  de espessura e raio 10 mm transporta sangue sob pressão média de 85 mmHg. A parede do vaso é constituída de material homogêneo e linearmente isotrópico com módulo de elasticidade igual a 15 kPa. Supondo que o modelo de Moens-Korteweg é aplicável para esse sistema, podemos afirmar que uma onda de pressão propagando-se pela parede do vaso em foco terá velocidade superior a 6 cm/sec.

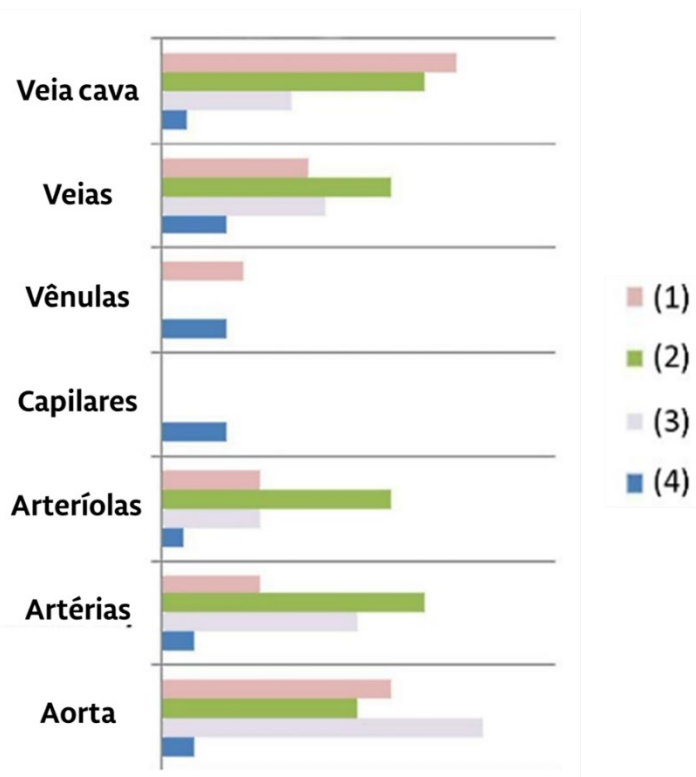
**5.( )** A amostra anelar ilustrada a seguir foi extraída de uma artéria de origem desconhecida. A amostra foi cortada radialmente e, após o corte, exibiu a geometria mostrada na figura. As coordenadas de alguns pontos estão listadas na tabela à direita. Podemos afirmar que o ângulo de abertura, o qual é comumente utilizado como uma medida da pré-tensão da parede vascular, é superior a 65 graus.



Ponto	X	Y
A	0.381	-0.351
B	0.369	-0.291
C	0	0
D	0.38	0.151
E	0.422	0.207

## ■ Problema 2 (Estrutura da Parede de Vasos Sanguíneos)

As paredes de vasos sanguíneos humanos são primariamente constituídas de quatro componentes estruturais, quais sejam: (A) *Fibras elásticas*, especialmente elastina e microfibrilas; (B) *fibras de colágeno*, muito mais rígidas do que elastina; (C) *células musculares lisas*, ausentes em capilares; e (D) *endotélio*, uma camada fina que reveste a parede interna dos vasos. O gráfico a seguir contém as proporções de cada componente estrutural na composição de algumas classes vasculares. Associe os números (1) a (4) e as letras (A) a (D).



## ■ Problema 3 (Envelhecimento de Artérias)

À medida que uma artéria envelhece, o que ocorre com o módulo de Young e a complacência da parede vascular?

- (A) Com o envelhecimento, o módulo de Young e a complacência aumentam.
- (B) Com o envelhecimento, o módulo de Young aumenta e a complacência diminui.
- (C) Com o envelhecimento, a complacência aumenta e o módulo de Young diminui.
- (D) Com o envelhecimento, o módulo de Young e a complacência diminuem.

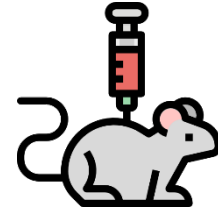
## ■ Problema 4 (Índice Cardíaco)

Em uma situação clínica, o volume sistólico de um paciente é 46 mL e a frequência cardíaca é 84 bpm.

- (a) Obtenha o débito cardíaco do paciente.
- (b) O índice cardíaco é dado pela razão entre débito cardíaco e a área de superfície corporal (ASC). Supondo que a ASC de um paciente equivale à área de um cilindro com diâmetro 30 cm e altura 1.70 m, encontre o índice cardíaco.

### ■ Problema 5 (Circulação em Ratos e Humanos)

Devido à ampla disponibilidade de cepas de ratos desprovidas de determinados genes, esses animais constituem um importante modelo experimental no estudo da aterosclerose. Embora ratos de laboratório normalmente não desenvolvam a doença, a deleção de genes envolvidos no metabolismo de colesterol conduz ao desenvolvimento de aterosclerose semelhante à patologia observada em humanos.



Como a hemodinâmica arterial – sobretudo a tensão de cisalhamento na parede vascular – guarda importante relação com o desenvolvimento do ateroma, há claro interesse no estudo comparativo da circulação em ratos e humanos.

**(a)** Mostre que a tensão de cisalhamento na parede de um vaso pode ser dada por

$$\tau_w = \frac{8\mu^2 Re_d}{\rho d^2}$$

onde  $\mu$  é a viscosidade do sangue (supondo que o sangue é newtoniano),  $\rho$  é a densidade do sangue,  $d$  é o diâmetro interno do vaso e  $Re_d$  é o número de Reynolds com o diâmetro  $d$  como dimensão de referência.

**(b)** Usando os dados tabelados a seguir, determine os valores de referência de  $\tau_w$  e o número de Womersley  $\alpha$  ( $= R\sqrt{\omega/\nu}$ , onde  $R$  é o raio,  $\omega$  é a frequência cardíaca e  $\nu$  é a viscosidade cinemática). Suponha que a viscosidade ( $= 0.035 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{sec}^{-1}$ ) e a densidade ( $= 1.05 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ) são as mesmas para ambas as espécies. Com base em seus resultados, você acha que as condições hemodinâmicas em ratos e humanos são de fato similares?

Propriedade	Humano	Rato
Débito cardíaco ( $\text{L}\cdot\text{min}^{-1}$ )	5.0	0.012
Frequência cardíaca (batidas por minuto)	60	600
Diâmetro da raiz aórtica (cm)	3.0	0.1

### ■ Problema 6 (Análise de uma Estenose)

*Bandeamento pulmonar* é uma intervenção realizada em crianças com deficiências cardíacas congênitas que as tornam suscetíveis a hipertensão pulmonar. Nesse procedimento, uma banda é disposta ao redor da artéria pulmonar para induzir uma estenose e assim reduzir a pressão na artéria pulmonar. Para as condições listadas a seguir, determine a redução de área e o raio da estenose necessários para obter uma queda de pressão de 15 mmHg entre a entrada e a saída da estenose.

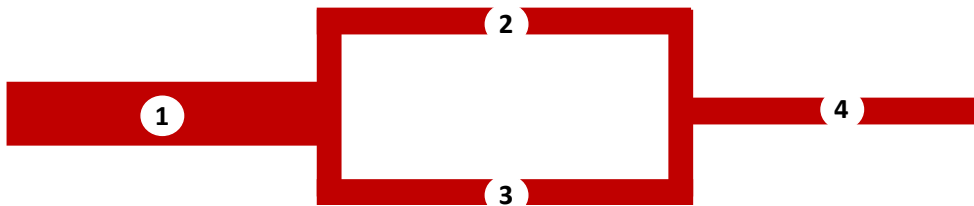
Vazão volumétrica	$2000 \text{ cm}^3\cdot\text{min}^{-1}$
Diâmetro da artéria pulmonar a montante da estenose	1.3 cm
Densidade do sangue	$1070 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Viscosidade do sangue	$0.035 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

### ■ Problema 7 (Análise de uma Bifurcação)

No esboço a seguir, sangue oriundo do vaso 1 divide-se em dois vasos filhos 2 e 3; em seguida, os vasos filhos convergem no mesmo vaso 4. O vaso 1 tem diâmetro 1 cm ao passo que os vasos 2, 3 e 4 têm diâmetro de 0.25 cm. Todos os vasos têm 10 cm de comprimento.

(a) Se a queda de pressão  $\Delta p$  entre a entrada e a saída do circuito é 100 mmHg, calcule as vazões volumétricas em todos os quatro segmentos. Utilize valores razoáveis para a viscosidade e densidade do sangue.

(b) Sabendo que o diâmetro do segmento 2 é reduzido para 0.22 cm, determine as novas vazões volumétricas registradas em cada um dos segmentos.



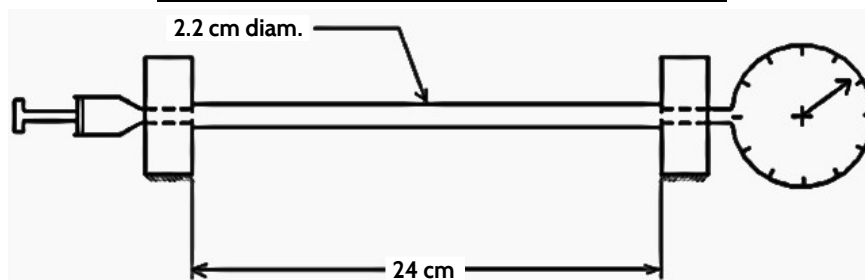
### ■ Problema 8 (Ondas de Pressão em uma Bifurcação)

Estuda-se a propagação de ondas de pressão em uma ramificação arterial na qual um vaso pai se divide em dois vasos filhos. O diâmetro do vaso pai é 110  $\mu\text{m}$ , o diâmetro de um dos vasos filhos é 70  $\mu\text{m}$  e o diâmetro do outro vaso filho é 100  $\mu\text{m}$ . Suponha que todos os vasos têm parede de espessura 12  $\mu\text{m}$  e que a pressão incidente em cada vaso é de 56 mmHg. Todos os três vasos têm módulo de Young igual a 9 kPa. Calcule a pressão refletida no vaso principal e as pressões em cada vaso filho.

### ■ Problema 9 (Medindo a Complacência)

Na figura a seguir, tem-se um tubo elástico ancorado entre dois suportes horizontais fixos. O tubo é preenchido com um volume conhecido de água. Para a pressão inicial  $P_o$ , o aumento de pressão ( $P_f - P_o$ ), o comprimento fixo  $L_o$ , o diâmetro  $D$  e o volume de fluido injetado  $\Delta V$  listados a seguir, determine a complacência e estime o módulo de Young incremental do tubo. Utilize  $t_o = 1 \text{ mm}$  como a espessura da parede do tubo.

Pressão inicial ( $P_o$ )	9.6 kPa
Aumento de pressão ( $P_f - P_o$ )	5.5 kPa
Diâmetro inicial do tubo ( $D$ )	22 mm
Comprimento inicial ( $L_o$ )	24 cm
Volume injetado ( $\Delta V$ )	10 mL



### ■ Problema 10 (Escoamento Pulsátil em um Conduto Cilíndrico)

Esse problema é dedicado à modelagem de um escoamento pulsátil em um tubo rígido, uma configuração mecânica que representa escoamentos biológicos com realismo superior a escoamentos não-oscilatórios. Busca-se a distribuição de velocidades de um fluido newtoniano em um vaso rígido, longo, circular forçado por um campo oscilatório de pressões. O escoamento ocorre apenas na direção axial e é completamente desenvolvido. Com essas simplificações, a equação de Navier-Stokes tem a forma

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \text{(I)}$$

onde  $\rho$  é a densidade do sangue,  $t$  é o tempo,  $v_z$  é a velocidade axial,  $z$  é a distância axial,  $p$  é a pressão,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $r$  é a distância radial. O gradiente de pressões oscila com frequência  $\omega$  e pode ser escrito como

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L} \cos(\omega t) = \text{Re} \left[ A^* e^{j\omega t} \right] \quad \text{(II)}$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\text{Re}[e^{j\omega t}]$  é a parte real de  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$  e  $A^*$  é uma constante real. Combinando **(II)** e **(I)**, vem

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = A^* e^{j\omega t} \quad \text{(III)}$$

Como condições de contorno, utilizamos ( $r = 0, \partial v_z / \partial r = 0$ ), que implica que a velocidade axial deve ser finita no centro da seção, e ( $r = R, v_z = 0$ ), que é a condição antideslizamento. Para tornar a equação diferencial acima mais tratável, supomos que a velocidade tem a forma

$$v_z = u e^{j\omega t} \quad \text{(IV)}$$

onde  $u$  é uma velocidade que varia com a posição radial  $r$  apenas. Substituindo **(IV)** em **(III)** e manipulando, a equação diferencial parcial torna-se uma equação ordinária,

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{j\omega u}{\nu} + \frac{A^*}{\mu} = 0 \quad \text{(V)}$$

com as condições de contorno atualizadas

$$\begin{cases} r = 0 ; du/dr = 0 \\ r = R ; u = 0 \end{cases} \quad \text{(VI, VII)}$$

Observe que inserimos a viscosidade cinemática  $\nu$  em **(V)**. A solução geral de **(V)** é

$$u(r) = \frac{A^*}{j\omega\rho} + C_1 J_0 \left( j^{3/2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu r}} \right) + C_2 Y_0 \left( j^{3/2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu r}} \right) \quad \text{(VIII)}$$

onde  $J_0$  e  $Y_0$  são funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, e ordem zero. Aplicando as condições de contorno **(VI)** e **(VII)**, obtemos o perfil de velocidades

$$v_z(r, t) = \frac{A^*}{j\omega\rho} \left[ 1 - \frac{J_0(j^{3/2}\alpha r/R)}{J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] e^{j\omega t} \quad \text{(IX)}$$

Sendo o gradiente de pressões dado pela parte real de  $A^* \exp(j\omega t)$ , a velocidade é a parte real de **(IX)**. Ademais, sabendo que as funções de Bessel dependem de  $j$ , a parte real da velocidade depende da magnitude do argumento  $\alpha r/R$ .

➔ Conhecendo a derivação acima, sua tarefa é plotar o perfil de velocidades  $v_z$  como função da posição radial e da fase de cada ciclo ( $\omega t$  é dividido em 360 graus) com um número de Womersley  $\alpha = 3.34$ , que é próximo ao  $\alpha$  da coronária descendente anterior esquerda. Use  $A^* = 1 \text{ dyn/cm}$  e  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Repita para  $\alpha = 0.5$  e  $\alpha = 8$  e disserte sobre seus resultados.

### ■ Problema 11 (Relação Pressão-Vazão em um Fluido de Casson)

Como o leitor deve saber, a relação constitutiva para um fluido de Casson, um modelo não-newtoniano comumente usado para representar o comportamento reológico do sangue humano, é

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + K_c \sqrt{\dot{\gamma}}$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento,  $\tau_y$  é a tensão de escoamento,  $K_c$  é o índice de consistência e  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento. Use a relação constitutiva acima para derivar expressões para **(a)** o perfil de velocidades e **(b)** a vazão volumétrica do escoamento de um fluido de Casson em um tubo circular rígido.

### ■ Problema 12 (Modelo Windkessel)

O modelo windkessel é um método de parâmetros concentrados (PCs) utilizado na análise do sistema cardiovascular humano. O primeiro desses métodos, proposto pelo médico alemão Otto Frank em 1899, baseia-se em dois PCs; são eles:

- (A)** Impedância aórtica característica e um parâmetro inercial.
- (B)** Resistência periférica e um parâmetro inercial.
- (C)** Resistência periférica e complacência arterial total.
- (D)** Resistência periférica e impedância aórtica característica.

### ■ Problema 13 (Índice de Desempenho de uma Válvula)

Uma válvula duplo folheto de 27 mm de diâmetro foi testada em um duplicador de pulsos com vazão sistólica média de 16 litros/min. A queda de pressão média correspondente foi de 5.2 mmHg. Supondo um coeficiente de descarga de 0.61 para a válvula duplo folheto, calcule a área efetiva do orifício da válvula e o índice de desempenho da válvula.



### ■ Problema 14 (Concentração de Oxigênio no Sangue)

A concentração de hemoglobina no sangue arterial de uma pessoa é igual a 0.14 g/mL. Qual é a concentração de oxigênio no sangue dessa pessoa, sabendo que toda sua hemoglobina está saturada com sangue?

### ■ Problema 15 (Modelo Krogh de Difusão de O<sub>2</sub>)

As células musculares de uma pessoa em condições de exercício absorvem O<sub>2</sub> com taxa  $2 \times 10^{-6}$  mol/cm<sup>3</sup>·s. Considere dois capilares adjacentes separados por  $2R_0$ , onde  $R_0$  é a meia-distância entre os centros dos capilares. Usando o modelo cilíndrico de Krogh, determine  $R_0$  sabendo que a concentração de oxigênio deve ser nula para essa meia-distância radial. O raio de ambos os capilares é  $R_c = 4 \mu\text{m}$  e a concentração de oxigênio na parede dos capilares é  $C_{O_2}(r = R_c) = 0.16$  mM. Utilize  $1.92 \times 10^{-5}$  cm<sup>2</sup>/sec como o coeficiente de difusão do oxigênio.

### ■ Problema 16 (Transferência de Massa por Difusão I)

Stents de eluição liberam agentes medicinais de modo gradual, possibilitando a administração direta e contínua do fármaco de interesse. Cientistas a serviço de um fabricante de tecnologia biomédica estudam o desempenho de um novo agente eluidor. Para tanto, uma amostra do agente é posicionada acima de uma camada pré-preparada do mesmo tipo de tecido sobre o qual o agente deverá agir em aplicações reais. A concentração do agente no decurso da análise é suposta constante e o tecido subjacente pode ser tratado como um meio planar semi-infinito. Os dados pertinentes estão na tabela ao fim do enunciado.

(a) Integre o produto entre o fluxo de agente para dentro do tecido e a área  $A$  para tempos  $t = 0$  até  $t = t'$ . Use seu resultado para exprimir o coeficiente de difusão em termos de tempo, absorção e área.

(b) Use os dados a seguir para determinar o coeficiente de difusão e estabelecer se a hipótese do tecido semi-infinito é de fato válida para o experimento em foco.

$M$ (Quantidade de agente penetrando o tecido)	$5 \times 10^{-13}$ mol
$C_0$ (Concentração inicial do agente)	$1 \times 10^{-6}$ mol·L <sup>-1</sup>
$t'$ (Tempo de exposição do tecido ao agente)	25 min
$A$ (Área do tecido)	0.75 cm <sup>2</sup>

### ■ Problema 17 (Transferência de Massa por Difusão II)

A difusão de uma proteína para o interior de um tecido é estudada através de medidas cuidadosas da absorção de uma versão fluorescente da proteína em uma amostra de tecido com espessura  $L$ . Inicialmente, não há proteína fluorescente no tecido. No tempo zero, a superfície em  $x = 0$  é exposta a uma concentração  $C_1$  de proteína fluorescente.

(a) Supondo que o tecido pode ser modelado como um meio planar semi-infinito, qual é o fluxo de proteína para dentro do tecido na posição  $x = 0$ ?

(b) Determine a absorção  $M$  de proteína pelo tecido, sabendo que  $A$  é a área de superfície do tecido e que  $M$  varia no tempo de acordo com a expressão



$$M(t) = A \int_0^t -D \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0} dt$$

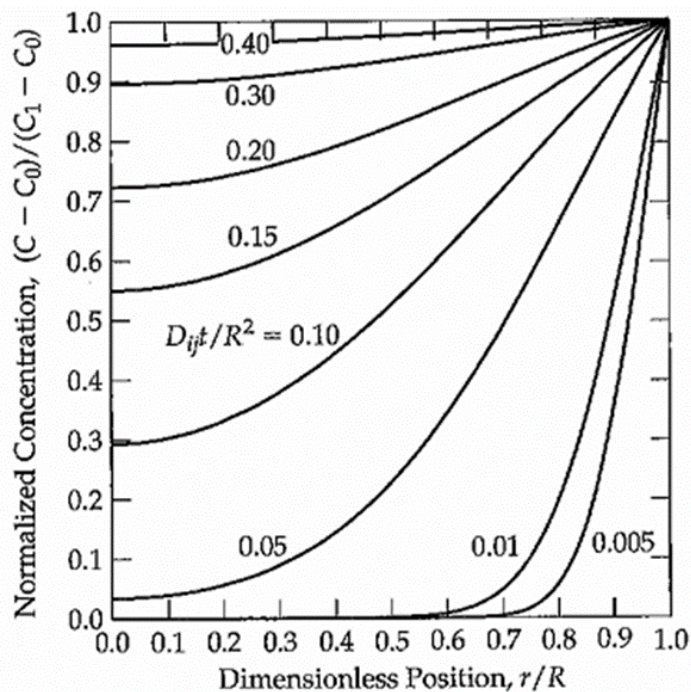
onde  $D$  é o coeficiente de difusão e  $(\partial c/\partial x)_{x=0}$  denota o gradiente de concentração de proteína marcada em  $x = 0$ .

(c) Determine o coeficiente de difusão para os seguintes dados.

$M(t = 600 \text{ s})$ (Quantidade de proteína especial absorvida em $t = 600 \text{ sec}$ )	$8.74 \times 10^{-13} \text{ mol}$
$C_1$ (Conc. de proteína especial em $x = 0$ )	$1 \times 10^{-9} \text{ mol/cm}^3$
$L$ (Espessura da amostra de tecido)	$0.015 \text{ cm}$
$A$ (Área da amostra de tecido)	$1 \text{ cm}^2$

### ■ Problema 18 (Transferência de Massa por Difusão III)

Uma esfera polimérica de raio  $0.2 \text{ cm}$  é dotada de concentração de  $0.1 \text{ mg/mL}$  de certa proteína. A esfera é disposta em um grande volume de um meio de cultura; a proteína é transportada, por difusão, ao meio de cultura; o meio de cultura é grande o bastante para que a concentração de proteína nele seja igual a zero. O coeficiente de difusão da proteína é  $5 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s}$  e o gráfico a seguir relaciona a concentração normalizada  $(C - C_0)/(C_1 - C_0)$  e a posição adimensional  $r/R$  para difusão não-permanente em uma esfera de raio  $R$ . Determine o tempo necessário para que a concentração de proteína no centro da esfera seja reduzida a 5% da concentração inicial.



Fonte: Truskey, Yuan e Katz (2009).

### ■ Problema 19 (Transferência de Massa por Difusão IV)

Para obter uma taxa constante de transporte de um fármaco, podemos ter a droga em um reservatório e difundi-la continuamente através de uma membrana de espessura  $\ell$ , como ilustrado a seguir. Supondo que o fármaco é rapidamente difundido pela pele e adentra o sangue, é aceitável supor que a concentração da droga na pele é igual a zero. Nesse caso, a distribuição de concentração  $C$  na membrana é dada por

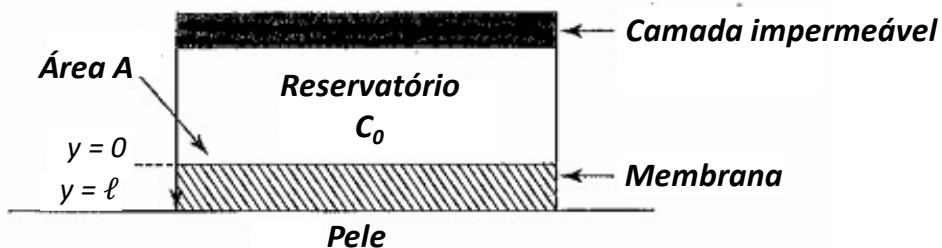
$$\frac{C}{\Phi C_0} = 1 - \eta' - 2 \sum \frac{\sin(n\pi\eta')}{n\pi} \exp(-n^2\pi^2\tau)$$

onde  $C_0$  é a concentração inicial,  $\Phi$  é o coeficiente de partição,  $n$  é um inteiro positivo,  $\eta' = y/\ell$ ,  $\tau = tD/\ell^2$ ,  $\ell$  é a espessura da membrana,  $t$  é o tempo e  $D$  é o coeficiente de difusão. No presente caso, supõe-se que a concentração de droga é constante e o estado estacionário é atingido com  $t = 0.5$ .

**(a)** Mostre que, no estado estacionário, a taxa de liberação do fármaco em  $y = \ell$  é independente do tempo. Lembre-se que a taxa de liberação é igual ao produto entre fluxo e área da membrana ( $= A$ ).

**(b)** Para  $D_{ij} = 5 \times 10^{-9} \text{ cm}^2/\text{sec}$ ,  $\Phi = 0.1$  e  $A = 2.0 \text{ cm}^2$ , determine a espessura e a concentração  $C_0$  necessários para garantir que o estado estacionário seja atingido em 10 minutos e a taxa de liberação seja 0.15 mg/hora.

**(c)** A concentração do fármaco pode ser suposta constante em  $y = 0$  se a variação da concentração no reservatório for menor que 3%. Esse critério será obedecido se o dispositivo de administração do fármaco for utilizado por 10 horas consecutivas? Justifique.



### ■ Soluções

#### ■ Prob. 1

**1. Verdadeiro.** O volume inicial  $V_o$  e o volume final  $V_f$  do segmento aórtico são, respectivamente,

$$V_o = \frac{\pi \times 2.5^2}{4} \times 10 = 49.1 \text{ cm}^3$$

$$V_f = \frac{\pi \times (1.08 \times 2.5)^2}{4} \times 10 = 57.3 \text{ cm}^3$$

Observando que  $1 \text{ mmHg} \approx 133.32 \text{ Pa}$ , a complacência elástica  $C$  é

$$C = \frac{\Delta \nabla}{\nabla_o \Delta p} = \frac{(57.3 - 49.1)}{49.1 \times (40 \times 133.32)} = \boxed{3.13 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}}$$

**2.Falso.** Recorrendo à ilustração a seguir, temos  $a_0 = 525 \mu\text{m}$ ,  $a_1 = 400 \mu\text{m}$  e  $a_2 = 435 \mu\text{m}$ . Para obter os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , escrevemos

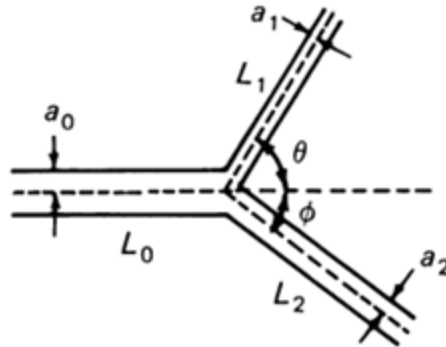
$$\cos \theta = \frac{a_0^4 + a_1^4 - a_2^4}{2a_0^2 a_1^2} = \frac{525^4 + 400^4 - 435^4}{2 \times 525^2 \times 400^2} = 0.7456$$

$$\therefore \theta = \arccos(0.7456) = 41.79^\circ$$

$$\cos \phi = \frac{a_0^4 - a_1^4 + a_2^4}{2a_0^2 a_2^2} = \frac{525^4 - 400^4 + 435^4}{2 \times 525^2 \times 435^2} = 0.8261$$

$$\therefore \phi = \arccos(0.8261) = 34.30^\circ$$

Portanto, nenhum dos dois ângulos de bifurcação é maior que  $45^\circ$ .



**3.Verdadeiro.** Desprezando perdas devidas à viscosidade, podemos avaliar esse item com a equação de Bernoulli. Usando os subscritos '1' para designar o segmento normal e '2' para o segmento estenótico, escrevemos

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} \quad \text{(I)}$$

Pela equação da continuidade,

$$\frac{\pi d_1^2}{4} \times V_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} \times V_2 \rightarrow V_2 = V_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \quad \text{(II)}$$

Combinando (II) e (I) e resolvendo para a pressão  $p_2$  na estenose,

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_1^2}{2} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4$$

$$\therefore p_2 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} - \frac{\rho V_1^2}{2} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4$$

$$\therefore p_2 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right]$$

$$\therefore p_2 = 100 \times 133.3 + \frac{1060 \times 0.5^2}{2} \times \left[ 1 - \left( \frac{1.0}{0.5} \right)^4 \right] = 11.34 \text{ kPa} = \boxed{85.07 \text{ mmHg}}$$

**4. Verdadeiro.** Aplicando a fórmula de Moens-Korteweg, temos

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{4pr_i}} = \sqrt{\frac{15,000 \times (100 \times 10^{-6})}{4 \times (85 \times 133.32) \times 0.01}} = 0.0575 \text{ m/sec} = \boxed{5.75 \text{ cm/sec}}$$

**5. Falso.** O ângulo de abertura  $\theta$  é o ângulo subtendido pelos segmentos  $BC$  e  $CD$  em  $C$ . Para obtê-lo, primeiramente calculamos os comprimentos de  $BC$ ,  $CD$  e  $BD$ ,

$$\overline{BC} = \sqrt{(0 - 0.369)^2 + [0 - (-0.291)]^2} = 0.4699 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(0.38 - 0)^2 + (0.151 - 0)^2} = 0.4089 \text{ cm}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(0.38 - 0.369)^2 + [0.151 - (-0.291)]^2} = 0.4421 \text{ cm}$$

Em seguida, aplicamos a lei dos cossenos,

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2}{2\overline{BC} \times \overline{CD}} \right)$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left( \frac{0.4699^2 + 0.4089^2 - 0.4421^2}{2 \times 0.4699 \times 0.4089} \right) = \cos^{-1}(0.5011) = \boxed{59.93^\circ}$$

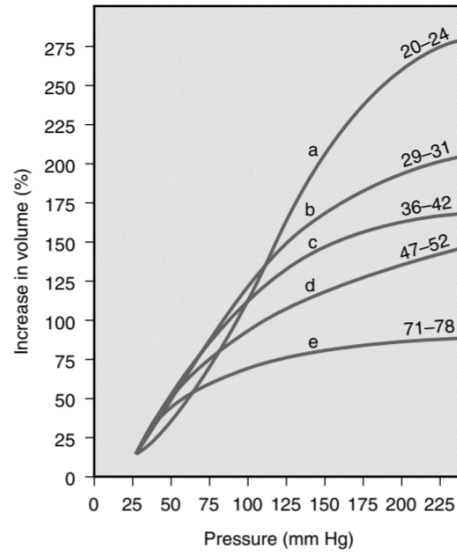
### ■ Prob. 2

As associações corretas estão na tabela a seguir.

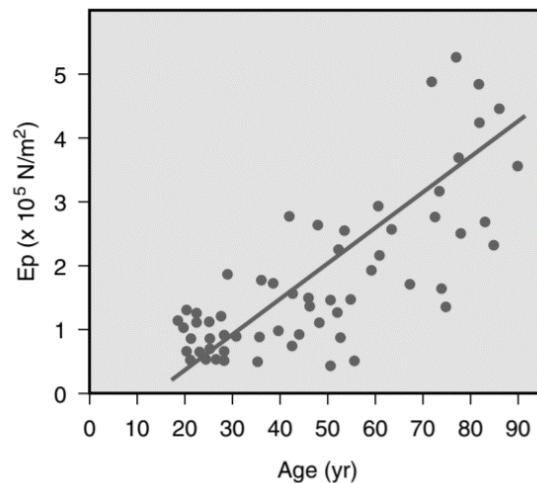
Número	Letra	Componente
(1)	(B)	Fibras de colágeno
(2)	(C)	Células musc. lisas
(3)	(A)	Fibras elásticas
(4)	(D)	Endotélio

### ■ Prob. 3

O gráfico a seguir mostra a relação pressão-volume para segmentos aórticos obtidos de pessoas de vários grupos etários; os intervalos de idade estão indicados sobre as curvas. Observa-se que, à medida que os grupos etários avançam (isto é, envelhecem), as curvas são deslocadas para baixo, indicando a redução na complacência dos vasos.



O gráfico a seguir mostra a relação entre idade e módulo de Young ( $E_p$ ) de segmentos aórticos extraídos de 61 pacientes de diferentes grupos etários. É ostensivo que o módulo de elasticidade tende a crescer com a idade. Isso corrobora as tendências sugeridas no gráfico anterior, já que o módulo de Young, que é uma medida de rigidez, é inversamente proporcional à complacência, que é uma medida de distensibilidade.



→ A resposta correta é B.

#### ■ Prob. 4

**Parte (a):** O débito cardíaco é simplesmente o produto entre volume sistólico e frequência cardíaca,

$$\overline{CO} = \overline{SV} \times \overline{HR} = \left( 46 \frac{\text{mL}}{\text{batida}} \right) \times \left( 84 \frac{\text{batidas}}{\text{min}} \right) = 3860 \text{ cm}^3/\text{min} = \boxed{3.86 \text{ L/min}}$$

**Parte (b):** A área de superfície corporal do paciente (ou cilindro, se você preferir) é

$$A = \frac{\pi \times 0.3^2}{4} + 2\pi \times 0.15 \times 1.70 = 1.67 \text{ m}^2$$

e o índice cardíaco é, portanto,

$$\overline{CI} = \frac{\overline{CO}}{A} = \frac{3.86}{1.67} = \boxed{2.31 \text{ Lpm/m}^2}$$

### ■ Prob. 5

**Parte (a):** A tensão de cisalhamento na parede para escoamento laminar, estacionário, completamente desenvolvido em um conduto circular rígido é dado pela expressão usual

$$\tau_w = \frac{4\mu V}{R} \quad \text{(I)}$$

ao passo que o número de Reynolds é

$$Re_d = \frac{\rho V d}{\mu}$$

Usando  $Re_d$  e manipulando **(I)**, temos

$$\tau_w = \frac{4\mu V}{R} = \frac{8\mu^2 V}{d} \times \frac{1}{\mu} = \frac{8\mu^2 V}{d^2} \times \frac{d}{\mu} = \frac{8\mu^2}{\rho d^2} \times \underbrace{\frac{\rho V d}{\mu}}_{= Re_d}$$

$$\therefore \tau_w = \boxed{\frac{8\mu^2 Re_d}{\rho d^2}}$$

**Parte (b):** O débito cardíaco de um humano é  $Q = 5.0 \text{ L/min} = 5000 \text{ cm}^3/\text{min} = 83.33 \text{ cm}^3/\text{sec}$ . Para obter a velocidade de escoamento, dividimos  $Q$  pela área da raiz aórtica, que é  $A = \pi \times 3.0^2/4 = 7.07 \text{ cm}^2$ , de modo que  $V = Q/A = 83.33/7.07 = 11.8 \text{ cm/sec}$ . O número de Reynolds é então

$$Re_d = \frac{1.05 \times 11.8 \times 3.0}{0.035} = 1062$$

Substituindo na expressão obtida na parte (a), temos a tensão de cisalhamento na parede,  $\tau_w$ ,

$$\tau_w = \frac{8\mu^2 Re_d}{\rho D^2} = \frac{8 \times 0.035^2 \times 1062}{1.05 \times 3.0^2} = \boxed{1.101 \text{ dyn/cm}^2}$$

A viscosidade cinemática do sangue é  $\nu = \mu/\rho = 0.035/1.05 = 0.0333 \text{ cm}^2/\text{s}$  e a frequência cardíaca é  $\omega = 60 \text{ bpm} = 1 \text{ Hz} = 6.28 \text{ rad/sec}$ . Segue que o número de Womersley é

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{3.0}{2} \times \sqrt{\frac{6.28}{0.0333}} = \boxed{20.6}$$

Considerando em seguida o rato, utilizamos o débito cardíaco  $Q = 0.012 \text{ L/min} = 12 \text{ cm}^3/\text{min} = 0.2 \text{ cm}^3/\text{sec}$  e a área da raiz aórtica  $A = \pi \times 0.1^2/4 = 0.00785 \text{ cm}^2$  para determinar a velocidade de escoamento  $V = Q/A = 0.2/0.00785 = 25.5 \text{ cm/sec}$ . O número de Reynolds é então

$$\text{Re}_d = \frac{1.05 \times 25.5 \times 0.1}{0.035} = 76.5$$

Substituindo os valores pertinentes na expressão desenvolvida na parte (a),

$$\tau_w = \frac{8\mu^2 \text{Re}_D}{\rho D^2} = \frac{8 \times 0.035^2 \times 76.5}{1.05 \times 0.1^2} = \boxed{71.4 \text{ dyn/cm}^2}$$

A viscosidade cinemática é suposta idêntica ao valor obtido para o humano e a frequência cardíaca é  $\omega = 600 \text{ bpm} = 10 \text{ Hz} = 62.8 \text{ rad/sec}$ . Segue que o número de Womersley é

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{0.1}{2} \times \sqrt{\frac{62.8}{0.0333}} = \boxed{2.17}$$

Em suma, verificamos que nenhum dos principais parâmetros de interesse tem a mesma ordem de grandeza para homem e rato. O número de Reynolds é  $\mathcal{O}(10^3)$  no humano e  $\mathcal{O}(10^1)$  no rato; a tensão de parede é  $\mathcal{O}(10^0)$  no humano e  $\mathcal{O}(10^1)$  no rato; por fim, o número de Womersley é  $\mathcal{O}(10^1)$  no humano e  $\mathcal{O}(10^0)$  no rato. Portanto, a espécie de rato em foco não pode ser utilizada como um modelo em escala da hemodinâmica humana.

### ■ Prob. 6

Para esse problema, a equação de Bernoulli é aplicável e pode ser utilizada para associar pressão e velocidade. Escolhendo uma linha de corrente na linha central do conduto, podemos desprezar a influência da gravidade e escrever a relação simplificada

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}$$

Resolvendo para a diferença de pressão,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) \quad (\text{I})$$

Usando a equação da continuidade, temos  $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ . Observando que  $Q = 2000/60 = 33.3 \text{ cm}^3/\text{s}$ , a velocidade a montante pode ser obtida como

$$Q = V_1 A_1 \rightarrow V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

$$\therefore V_1 = \frac{33.3}{\pi \times 1.3^2 / 4} = 25.1 \text{ cm/s}$$

O número de Reynolds  $Re_{d1}$  é então

$$Re_{d1} = \frac{\rho V_1 d_1}{\mu} = \frac{1.07 \times 25.1 \times 1.3}{0.035} = 998$$

Portanto, o escoamento a montante é laminar. Nesse caso, a velocidade na linha central é o dobro de  $V_1$ , ou seja,  $V_{max} = 2V_1 = 2 \times 25.1 = 50.2 \text{ cm/s}$ . Manipulando a equação de Bernoulli (eq. **(II)**),

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Resolvendo para a razão de áreas,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \rightarrow \left( \frac{A_1}{A_2} \right) = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2} + 1}$$

Mas  $p_1 - p_2 = 15 \text{ mmHg} = 1998 \text{ Pa}$ , logo

$$\left( \frac{A_1}{A_2} \right) = \sqrt{\frac{1998}{1070 \times 0.251^2} + 1} = \boxed{5.54}$$

Já que a área é reduzida por um fator de 5.54, a velocidade média deve *aumentar* em um fator de 5.54. O raio é reduzido pelo fator  $\sqrt{5.54} = 2.35$ , e o número de Reynolds atualizado será  $998 \times 5.54 / 2.35 = 2353$ , o que nos coloca na região de transição entre laminar e turbulento.

### ■ Prob. 7

**Parte (a):** Primeiramente, observe que a vazão volumétrica é dada por  $Q = \Delta p / R_{\text{eff}}$ , onde  $\Delta p = 100 \text{ mmHg}$  é a queda de pressão e  $R_{\text{eff}}$  é a resistência vascular efetiva, a qual é inicialmente desconhecida. Para o vaso 1, a resistência vascular é (note que, neste e nos cálculos subsequentes, estamos omitindo as unidades de  $R$  mas estamos utilizando as mesmas unidades nos numeradores e denominadores de cada resistência vascular)

$$R_1 = \frac{8\mu L}{\pi a_1^4} = \frac{8 \times 0.035 \times 10}{\pi \times 0.5^4} = 14.26$$

Para os vasos 2, 3 e 4 a resistência vascular é

$$R_2 = R_3 = R_4 = \frac{8 \times 0.035 \times 10}{\pi \times 0.125^4} = 3651$$

Já que os vasos 2 e 3 estão em paralelo, a resistência equivalente é dada por



$$\frac{1}{R_{2-3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3651 \times 3651}{3651 + 3651} = 1826$$

Em seguida, os vasos 1, 2-3 e 4 estão em série, o que nos permite escrever

$$R_{eff} = R_1 + R_{2-3} + R_4 = 14 + 1826 + 3651 = 5491$$

Por fim, com uma queda de pressão  $\Delta p = 100 \text{ mmHg} \times 1333 \text{ (dyn/cm}^2\text{)/mmHg} = 133,300 \text{ dyn/cm}^2$ , a vazão volumétrica torna-se

$$Q = \frac{133,330}{5491} = \boxed{24.28 \text{ cm}^3/\text{s}}$$

Os segmentos 1 e 4 transportarão  $24.28 \text{ cm}^3/\text{s}$ , ao passo que os segmentos transportarão  $12.14 \text{ cm}^3/\text{s}$  cada um.

**Parte (b):** Nesse caso, se o raio do vaso 2 é reduzido de 0.125 para 0.11 cm, a resistência vascular atualizada será

$$R_{2,nova} = \frac{8 \times 0.035 \times 10}{\pi \times 0.11^4} = 6088$$

e a resistência vascular obtida com a combinação de 2 e 3 torna-se

$$\frac{1}{R_{2-3nova}} = \frac{R_{2,nova} R_3}{R_{2,nova} + R_3} = \frac{6088 \times 3651}{6088 + 3651} = 2282$$

Note que a resistência cresceu de 1826 na parte (a) para 2282 aqui, o que corresponde a um ganho de 25%. Resta apenas calcular a resistência efetiva,

$$R_{eff,nova} = 14 + 2282 + 3651 = 5947$$

A vazão volumétrica é então

$$Q = \frac{133,330}{5947} = \boxed{22.41 \text{ cm}^3/\text{s}}$$

Esse resultado é 7.7% menor que aquele obtido na parte (a). A vazão nos segmentos 1 e 4 será  $22.41 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Diferentemente do que ocorre na parte (a), os vasos filhos 2 e 3 não são iguais, e, portanto, não podemos afirmar que cada um transportará uma vazão  $Q/2$ . Mas podemos determinar as vazões desconhecidas através de divisão de correntes,

$$\frac{R_{2,nova}}{R_{2,nova} + R_3} = \frac{6088}{6088 + 3651} = 0.625$$

$$\frac{R_3}{R_{2,nova} + R_3} = \frac{3651}{6088 + 3651} = 0.375$$

$$\text{Vazão no segmento 2: } Q_2 = 0.375 \times 22.41 = \boxed{8.40 \text{ cm}^3/\text{s}}$$

$$\text{Vazão no segmento 3: } Q_3 = 0.625 \times 22.41 = \boxed{14.01 \text{ cm}^3/\text{s}}$$

### ■ Prob. 8

O primeiro passo é calcular as velocidades de onda do vaso pai (subscrito 'p'), do vaso filho menor (isto é, aquele com diâmetro de 70  $\mu\text{m}$ , subscrito 'd1') e do vaso filho maior (ou seja, aquele com diâmetro de 100  $\mu\text{m}$ , subscrito 'd2') usando a fórmula de Moens-Korteweg,

$$c_p = \sqrt{\frac{Eh}{4pR}} = \sqrt{\frac{15,000 \times (12 \times 10^{-6})}{4 \times (56 \times 133.32) \times (55 \times 10^{-6})}} = 0.3310 \text{ m/s}$$

$$c_{d1} = \sqrt{\frac{15,000 \times (12 \times 10^{-6})}{4 \times (56 \times 133.32) \times (35 \times 10^{-6})}} = 0.4150 \text{ m/s}$$

$$c_{d2} = \sqrt{\frac{15,000 \times (12 \times 10^{-6})}{4 \times (56 \times 133.32) \times (50 \times 10^{-6})}} = 0.3472 \text{ m/s}$$

Sendo  $\rho_b = 1050 \text{ kg/m}^3$  a densidade do sangue, podemos prosseguir e determinar as impedâncias características  $Z$ ,

$$Z_p = \frac{\rho c_p}{A} = \frac{1050 \times 0.3310}{\pi \times (55 \times 10^{-6})^2} = 3.657 \times 10^{10} \text{ kg/m}^4 \cdot \text{s}$$

$$Z_{d1} = \frac{\rho c_{d1}}{A} = \frac{1050 \times 0.4150}{\pi \times (35 \times 10^{-6})^2} = 1.132 \times 10^{11} \text{ kg/m}^4 \cdot \text{s}$$

$$Z_{d2} = \frac{\rho c_{d2}}{A} = \frac{1050 \times 0.3472}{\pi \times (50 \times 10^{-6})^2} = 4.642 \times 10^{10} \text{ kg/m}^4 \cdot \text{s}$$

Em seguida, para encontrar a pressão refletida  $p_r$ ,

$$\frac{p_r}{p_p} = \frac{Z_p^{-1} - (Z_{d1}^{-1} + Z_{d2}^{-1})}{Z_p^{-1} + (Z_{d1}^{-1} + Z_{d2}^{-1})} = \frac{(3.657 \times 10^{10})^{-1} - \left[ (1.132 \times 10^{11})^{-1} + (4.642 \times 10^{10})^{-1} \right]}{(3.657 \times 10^{10})^{-1} + \left[ (1.132 \times 10^{11})^{-1} + (4.642 \times 10^{10})^{-1} \right]} = -0.0525$$

$$\therefore p_r = -0.0525 p_p = -0.0525 \times 56 = \boxed{-2.94 \text{ mmHg}}$$

O sinal negativo indica que a onda de pressão refletida se propaga para a direita. Por fim, para obter  $p_{d1}$  e  $p_{d2}$ , escrevemos

$$\frac{p_{d1}}{p_p} = \frac{p_{d2}}{p_p} = \frac{2Z_p^{-1}}{Z_p^{-1} + (Z_{d1}^{-1} + Z_{d2}^{-1})} = \frac{2 \times (3.657 \times 10^{10})^{-1}}{(3.657 \times 10^{10})^{-1} + \left[ (1.132 \times 10^{11})^{-1} + (4.642 \times 10^{10})^{-1} \right]} = 0.9475$$

$$\therefore p_{d1} = p_{d2} = 0.9475 p_p = 0.9475 \times 56 = \boxed{53.06 \text{ mmHg}}$$

**Dica:** A função MATLAB `pulse1` listada a seguir pode ser utilizada para resolver esse problema com facilidade:

```
function [pr, pd1, pd2] = pulse1(ee, h, p, Rp, Rd1, Rd2)
cp = sqrt(ee*h/(4*p*Rp));
cd1 = sqrt(ee*h/(4*p*Rd1));
cd2 = sqrt(ee*h/(4*p*Rd2));

Zp = 1050*cp/(pi*Rp.^2);
Zd1 = 1050*cd1/(pi*Rd1.^2);
Zd2 = 1050*cd2/(pi*Rd2.^2);

pr = (p./133.32)*((Zp.^(-1)) - ((Zd1.^(-1)) + (Zd2.^(-1))))./((Zp.^(-1))
+ ((Zd1.^(-1)) + (Zd2.^(-1))));
pd1 = (p./133.32)*(2*Zp.^(-1))./((Zp.^(-1)) + ((Zd1.^(-1)) + (Zd2.^(-1))));
pd2 = (p./133.32)*(2*Zp.^(-1))./((Zp.^(-1)) + ((Zd1.^(-1)) + (Zd2.^(-1))));
```

### ■ Prob. 9

A variação na área de seção do tubo que resulta após a injeção de 10 mL de água no tubo é dada pela razão entre a variação de volume e o comprimento do tubo,

$$\Delta A = \frac{\Delta V}{L_o} = \frac{10}{24} = 0.417 \text{ cm}^2$$

A complacência do tubo é então dada pela variação de área dividida pela variação de pressão,

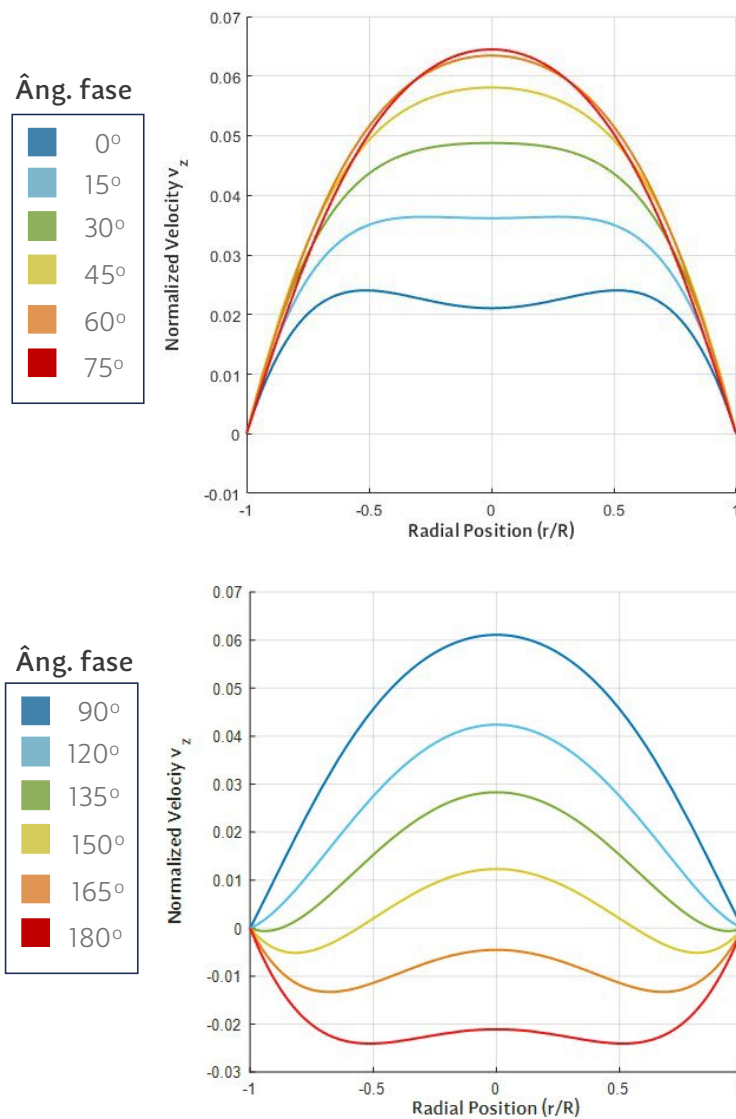
$$C = \frac{dA}{dP} = \frac{0.4 \times 10^{-4}}{5500} = \boxed{7.27 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}}$$

Após determinar a complacência, podemos estabelecer o módulo de Young incremental como

$$E = \frac{2\pi r_o^3}{Ct_o} = \frac{2\pi \times 0.011^3}{(7.27 \times 10^{-9}) \times 0.001} = 1.15 \times 10^6 \text{ Pa} = \boxed{1.15 \text{ MPa}}$$

### ■ Prob. 10

Os perfis de velocidade para  $\alpha = 3.34$  podem ser obtidos com o código MATLAB *pulsatileFlow.m*, que está disponível [nessa pasta de Google Drive](#). Os perfis assim obtidos estão mostrados a seguir; deixo como exercício para leitor o preparo dos gráficos para  $\alpha = 0.5$  e  $\alpha = 8$ . Observando as curvas, vemos que a velocidade axial não está em fase com a onda de pressão. A pressão atinge um valor máximo com a fase  $0^\circ$ , ao passo que a velocidade na linha central é máxima quando a fase é aproximadamente igual a  $70^\circ$ . No tempo zero, quando o gradiente de pressão é máximo, o perfil de velocidades é consideravelmente diferente do perfil parabólico esperado em escoamentos de Hagen-Poiseuille. Conforme o tempo progride, a velocidade cresce e o gradiente de pressão decresce; a aceleração do fluido é gradualmente reduzida, e entre  $60^\circ$  e  $100^\circ$  a distribuição de velocidades descreve um perfil parabólico.



■ **Prob. 11**

**Parte (a):** A taxa de cisalhamento é  $\dot{\gamma} = -du/dr$  e a tensão de cisalhamento é dada pela equação usual

$$\tau = \frac{r\Delta p}{2L}$$

onde  $r$  é a distância radial,  $\Delta p$  é a queda de pressão e  $L$  é o comprimento do conduto. Substituindo na relação constitutiva e manipulando,

$$\begin{aligned}\sqrt{\tau} &= \sqrt{\tau_y} + K_c \sqrt{\dot{\gamma}} \rightarrow \sqrt{\frac{r\Delta p}{2L}} = \sqrt{\tau_y} + K_c \sqrt{-\frac{du}{dr}} \\ \therefore K_c \sqrt{-\frac{du}{dr}} &= \sqrt{\frac{r\Delta p}{2L}} - \sqrt{\tau_y} \\ \therefore \sqrt{-\frac{du}{dr}} &= \frac{1}{K_c} \sqrt{\frac{r\Delta p}{2L}} - \frac{\sqrt{\tau_y}}{K_c}\end{aligned}$$

Elevando os dois lados ao quadrado e separando variáveis,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{-\frac{du}{dr}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{K_c} \sqrt{\frac{r\Delta p}{2L}} - \frac{\sqrt{\tau_y}}{K_c}\right)^2 \\ \therefore -du &= \frac{\Delta p}{2K_c^2 L} r dr + \frac{\tau_y}{K_c^2} dr - \frac{2}{K_c^2} \sqrt{\frac{\tau_y \Delta p}{2L}} \sqrt{r} dr \\ \therefore du &= -\frac{\Delta p}{2K_c^2 L} r dr - \frac{\tau_y}{K_c^2} dr + \frac{2}{K_c^2} \sqrt{\frac{\tau_y \Delta p}{2L}} \sqrt{r} dr\end{aligned}$$

Integrando,

$$u = -\frac{1}{K_c^2} \frac{\Delta p}{2L} \frac{r^2}{2} - \frac{\tau_y}{K_c^2} r + \frac{2}{K_c^2} \sqrt{\frac{\tau_y \Delta p}{2L}} \frac{r^{3/2}}{3/2} + C \quad \text{(I)}$$

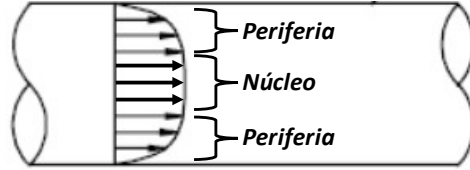
Como condição de contorno, temos  $u = 0$  em  $r = R$  (condição antideslizamento); portanto, a constante  $C$  é tal que

$$C = \frac{1}{K_c^2} \frac{\Delta p}{2L} \frac{R^2}{2} + \frac{\tau_y}{K_c^2} R + \frac{2}{K_c^2} \sqrt{\frac{\tau_y \Delta p}{2L}} \frac{R^{3/2}}{3/2}$$

Substituindo em **(I)** e ajustando, obtemos o perfil de velocidades

$$u = \frac{1}{K_c^2} \frac{\Delta p}{4L} (R^2 - r^2) + \frac{\tau_y}{K_c^2} (R - r) - \frac{4}{3K_c^2} \sqrt{\frac{\tau_y \Delta p}{2L}} (R^{3/2} - r^{3/2}) \quad \text{(II)}$$

Somente haverá movimento se o cisalhamento  $\tau_w$  na parede exceder a tensão de escoamento  $\tau_y$  do fluido de Casson. O perfil de velocidades será achatado na região do 'núcleo' da seção e descrito por **(II)** na região 'periférica' da seção, como ilustra a figura a seguir.



Para obter o raio  $R_c$  do núcleo, fazemos  $\tau = \tau_y$  e resolvemos para  $R_c$ ,

$$\tau = \tau_y \rightarrow \tau_y = \frac{R_c \Delta p}{2L}$$

$$\therefore R_c = \frac{2L\tau_y}{\Delta p}$$

Substituindo em **(II)**, obtemos a velocidade  $u_c$  na região nuclear,

$$u_c = \frac{1}{K_c^2} \frac{\Delta p}{4L} (R^2 - R_c^2) + \frac{\tau_y}{K_c^2} (R - R_c) - \frac{4}{3K_c^2} \sqrt{\frac{\tau_y \Delta p}{2L}} (R^{3/2} - R_c^{3/2})$$

Usando a expressão obtida para  $R_c$  e simplificando,

$$u_c = \frac{\Delta p/L}{4K_c^2} \left[ R^2 - \frac{8}{3} \sqrt{R_c} R^{3/2} + 2R_c R - \frac{R_c^2}{3} \right] \quad \text{(III)}$$

Note que a expressão acima não contém a distância radial  $r$  e, portanto, é uma constante; isso justifica o caráter 'achatado' do perfil de velocidades na região nuclear. Para  $r > R_c$  (isto é, na região periférica), o perfil de velocidades é dado por

$$u_{\text{per}} = \frac{\Delta p/L}{4K_c^2} \left[ R^2 - r^2 + 2R_c R - 2R_c r - \frac{8}{3} \sqrt{R_c} R^{3/2} + \frac{8}{3} \sqrt{R_c} r^{3/2} \right] \quad \text{(IV)}$$

**Parte (b):** A vazão volumétrica no tubo é dada pela soma da vazão  $Q_{\text{nuc}}$  na região nuclear e da vazão  $Q_{\text{per}}$  na região periférica,

$$Q = Q_{\text{nuc}} + Q_{\text{per}} \quad \text{(V)}$$

A contribuição  $Q_{\text{nuc}}$  fornecida pelo núcleo é obtida como o produto entre a área de seção  $\pi R_c^2$  e a velocidade  $u_c$  dada pela equação **(III)**,

$$Q_{\text{nuc}} = u_c \pi R_c^2 = \pi R_c^2 \frac{\Delta p/L}{4K_c^2} \left[ R^2 - \frac{8}{3} \sqrt{R_c} R^{3/2} + 2R_c R - \frac{R_c^2}{3} \right]$$

$$\therefore Q_{\text{nuc}} = \pi \frac{\Delta p/L}{4K_c^2} \left[ R^2 R_c^2 - \frac{8}{3} R_c^{5/2} R^{3/2} + 2R_c^3 R - \frac{R_c^4}{3} \right] \quad \text{(VI)}$$

Por sua vez, para obter a vazão na região periférica, integramos  $u_{\text{per}} \times 2\pi r dr$  entre  $r = R_c$  e  $r = R$ ,

$$Q_{\text{per}} = \int_{R_c}^R u_{\text{per}} 2\pi r dr$$

$$\therefore Q_{\text{per}} = 2\pi \frac{\Delta p/L}{4K_c^2} \int_{R_c}^R \left[ R^2 - r^2 + 2R_c R - 2R_c r - \frac{8}{3} \sqrt{R_c} R^{3/2} + \frac{8}{3} \sqrt{R_c} r^{3/2} \right] dr$$

Realizando a integração e simplificando,

$$Q_{\text{per}} = \frac{\pi \Delta p/L}{4K_c^2} \left[ \frac{R^4}{2} - R^2 R_c^2 + \frac{13}{42} R_c^4 + \frac{2}{3} R_c R^3 - 2R R_c^3 - \frac{8}{7} \sqrt{R_c} R^{7/2} + \frac{8}{3} R^{3/2} R_c^{5/2} \right] \quad \text{(VII)}$$

Somando **(VI)** e **(VII)**, obtemos a vazão geral

$$Q = Q_{\text{core}} + Q_{\text{per}} = \frac{\pi \Delta p/L}{4K_c^2} \left[ \frac{R^4}{2} - \frac{R_c^4}{42} + \frac{2}{3} R_c R^3 - \frac{8}{7} \sqrt{R_c} R^{7/2} \right]$$

Substituindo o raio do  $R_c$  do núcleo, tem-se a expressão simplificada

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8K_c^2 L} \left\{ 1 - \frac{1}{21} \left[ \frac{2\tau_y}{(\Delta p/L)R} \right]^4 + \frac{4}{3} \left[ \frac{2\tau_y}{(\Delta p/L)R} \right] - \frac{16}{7} \left[ \frac{2\tau_y}{(\Delta p/L)R} \right]^{1/2} \right\}$$

Note que, se o fluido não tiver tensão de escoamento ( $\tau_y = 0$ ), apenas o termo '1' entre colchetes sobreviverá e teremos o resultado simplificado

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8K_c^2 L}$$

Ademais, se o índice de consistência for tal que  $K_c^2 = \mu$ , onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica de um fluido newtoniano, a expressão acima torna-se

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}$$

que, evidentemente, é a relação pressão-vazão para um escoamento de Hagen-Poiseuille.

### ■ Prob. 12

O modelo windkessel proposto por Otto Frank em 1899 utilizava como parâmetros concentrados a resistência periférica ( $R_p = \text{pressão média} \div \text{vazão média}$ ) e a complacência arterial total ( $C = dV/dp$ , onde  $V$  é o volume arterial total e  $p$  é a pressão arterial). Décadas depois, Westerhof *et al.* (1973) propuseram um modelo windkessel de três parâmetros que inclui a impedância característica da aorta. Mais recentemente, Stergiopoulos *et al.* (1999) descreveu um modelo windkessel de quatro parâmetros que, além dos parâmetros supracitados, inclui também um mecanismo inercial conectado em paralelo com a impedância aórtica característica.

→ **A resposta correta é C.**

### ■ Prob. 13

Convertemos a vazão  $Q = 15 \text{ lpm} = 15,000 \text{ cm}^3/\text{min} = 250 \text{ cm}^3/\text{s}$  e a queda de pressão  $\Delta p = 5.2 \text{ mmHg} = 6930 \text{ Pa}$ . Utilizando  $\rho = 1.06 \text{ g/cm}^3$  como a densidade do sangue, a área efetiva  $\overline{EOA}$  do orifício da válvula torna-se

$$\overline{EOA} = \frac{Q_m}{C_d} \sqrt{\frac{\rho}{2\Delta p}} = \frac{250}{0.61} \times \sqrt{\frac{1.06}{2 \times 6930}} = \boxed{3.58 \text{ cm}^2}$$

A área do anel valvular é  $\overline{VAA} = \pi \times 2.7^2/4 = 5.73 \text{ cm}^2$ . O índice de desempenho buscado é

$$\text{Índice de desempenho} = \frac{\overline{EOA}}{\overline{VAA}} = \frac{3.58}{5.73} = \boxed{0.625}$$

### ■ Prob. 14

A massa molecular da hemoglobina é 64,000. Uma concentração de hemoglobina igual a  $0.14 \text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$  equivale a uma concentração milimolar  $m$  tal que

$$m = 0.14 \frac{\text{g}}{\text{mL}} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} \times \frac{1}{64,000} \frac{\text{mol}}{\text{g}} \times \frac{1000 \text{ mmol}}{1 \text{ mol}} = 2.188 \text{ mM}$$

Supondo 97% de saturação, que ocorre a 100 mmHg e concentração de oxigênio normal, a concentração de oxigênio no plasma sanguíneo é aproximadamente  $1.34 \times 10^{-4} \text{ M}$  e o hematócrito é próximo de 45%. A concentração total de oxigênio que buscamos é

$$C_{BO} = C_{pl} + (\text{Hct}) \times 4C_{\text{Hb}} \times S$$
$$\therefore C_{BO} = (1.34 \times 10^{-4}) + 0.45 \times 4 \times (2.188 \times 10^{-3}) \times 0.97 = 0.00395 \text{ M}$$
$$\therefore \boxed{C_{BO} = 3.95 \text{ mM}}$$



### ■ Prob. 15

Substituindo os valores pertinentes na equação que descreve o modelo de Krogh de dois cilindros, temos

$$R_C^2 - R_0^2 - 2R_0^2 \ln\left(\frac{R_C}{R_0}\right) = \frac{4C_R D_{O_2}}{R_{O_2}}$$

$$\therefore (4 \times 10^{-4})^2 - R_0^2 - 2R_0^2 \ln\left(\frac{4 \times 10^{-6}}{R_0}\right) = \frac{4 \times (0.16 \times 10^{-6}) \times (1.92 \times 10^{-5})}{2 \times 10^{-6}}$$

$$\therefore (4 \times 10^{-4}) - R_0^2 - 2R_0^2 \ln\left(\frac{4 \times 10^{-6}}{R_0}\right) = 6.14 \times 10^{-6}$$

A equação transcendental acima deve ser resolvida numericamente; recorrendo ao Mathematica, podemos usar os comandos *Solve* ou *FindRoot*,

$$\text{In[220]= Solve}\left[\left(4 \times 10^{-4}\right)^2 - R_0^2 - 2 \times R_0^2 \times \text{Log}\left[\frac{4 \times 10^{-6}}{R_0}\right] = \frac{4 \times (0.16 \times 10^{-6}) \times (1.92 \times 10^{-5})}{2 \times 10^{-6}}, R_0\right]$$

⋯ Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

$$\text{Out[220]= }\{ \{R_0 \rightarrow 0.000790625\} \}$$

O resultado é  $R_0 \approx 7.91 \times 10^{-4} \text{ cm} = 7.91 \mu\text{m}$ .

### ■ Prob. 16

**Partes (a) e (b):** O fluxo de soluto associado à difusão de uma superfície de concentração  $C_1$  em um meio semi-infinito de concentração inicial  $C_0$  é

$$N_{ix}(x=0) = \sqrt{\frac{D_{ij}}{\pi t}} (C_0 - C_1)$$

Sabendo que inicialmente não há fármaco no tecido,  $C_1 = 0$ . A quantidade total de fármaco adentrando o tecido no tempo  $t$  é denotada com  $M$  e pode ser obtida integrando o produto entre fluxo e área superficial,

$$M = \int_0^t N_{ix}(x=0) A dt = \int_0^t \underbrace{\sqrt{\frac{D_{ij}}{\pi t}}}_{=2\sqrt{\frac{D_{ij}t'}{\pi}}} C_0 A dt = 2\sqrt{\frac{D_{ij}t'}{\pi}} C_0 A$$

Isolando o coeficiente de difusão  $D_{ij}$ ,

$$M = 2\sqrt{\frac{D_{ij}t'}{\pi}} C_0 A \rightarrow M^2 = 4\frac{D_{ij}t'}{\pi} C_0^2 A^2$$

$$\therefore D_{ij} = \frac{\pi M^2}{4C_0^2 A^2 t'}$$

Observando que  $t' = 25 \text{ min} = 1500 \text{ sec}$  e  $C_0 = 1 \times 10^{-6} \text{ mol/L} = 1 \times 10^{-9} \text{ mol/cm}^3$ , podemos substituir acima e obter

$$D_{ij} = \frac{\pi \times (5 \times 10^{-13})^2}{4 \times (1 \times 10^{-9})^2 \times 0.75^2 \times 1500} = \boxed{2.33 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s}}$$

Por fim, lembramos que a solução de difusão não-permanente em um meio semi-infinito somente é válida se os tempos considerados forem menores que  $L^2/36D_{ij}$ ; no presente caso,

$$t = \frac{L^2}{36D_{ij}} = \frac{0.004^2}{36 \times (2.33 \times 10^{-10})} = 1907 \text{ s}$$

Sendo  $1500 \text{ s} < 1907 \text{ s}$ , nossa análise é válida.

### ■ Prob. 17

**Parte (a):** Para um problema de difusão transitória em um meio semi-infinito, o fluxo  $N_x$  é dado por

$$N_x(x=0) = \sqrt{\frac{D}{\pi t}} C_1$$

**Parte (b):** Substituindo o fluxo  $N_x$  na expressão que nos foi dada e realizando a integração,

$$M(t) = A \int_0^t \sqrt{\frac{D}{\pi t}} C_1 dt = C_1 A \sqrt{\frac{D}{\pi}} \underbrace{\int_0^t t^{-1/2} dt}_{=2t^{1/2}} = \boxed{2C_1 A \sqrt{\frac{Dt}{\pi}}}$$

onde  $A$  é a área superficial.

**Parte (c):** Isolando o coeficiente de difusão na equação obtida na parte (b), temos

$$M = 2C_1 A \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \rightarrow M^2 = 4C_1^2 A^2 \frac{Dt}{\pi}$$

$$\therefore D = \frac{\pi M^2}{4t C_1^2 A^2}$$

$$\therefore D = \frac{\pi \times (8.74 \times 10^{-13})^2}{4 \times 600 \times (1 \times 10^{-9})^2 \times 1.0^2} = 10.0 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s} = \boxed{10^{-9} \text{ cm}^2/\text{s}}$$

### ■ Prob. 18

Temos aqui um problema de difusão transitória em dimensões finitas. Os dados disponíveis são  $C_1 = 0$ ,  $C_0 = 0.1$  mg/mL; busca-se o tempo no qual  $C/C_0 = 0.05$ . Isso corresponde a  $(C - C_0)/(C_1 - C_0) = (C - C_0)/(-C_0) = 1 - C/C_0 = 0.95$ . Recorrendo ao gráfico que acompanha o enunciado, vê-se que  $D_{ij}t/R^2 \approx 0.4$ . Resolvendo para o tempo  $t$ ,

$$\frac{D_{ij}t}{R^2} = 0.4 \rightarrow t = \frac{0.4R^2}{D_{ij}}$$

$$\therefore t = \frac{0.4 \times 0.2^2}{5 \times 10^{-10}} = 3.2 \times 10^7 \text{ sec} = \boxed{370.4 \text{ dias}}$$

### ■ Prob. 19

**Parte (a):** No estado estacionário, a soma que aparece no lado direito da equação fornecida é nula e podemos escrever

$$\frac{C}{\Phi C_0} = 1 - \eta' - \cancel{2 \sum \frac{\sin(n\pi\eta')}{n\pi} \exp(-n^2\pi^2\tau)}$$

$$\therefore \frac{C}{\Phi C_0} = 1 - \eta'$$

$$\therefore \frac{C}{\Phi C_0} = 1 - \frac{y}{\ell}$$

$$\therefore C = \Phi C_0 \left(1 - \frac{y}{\ell}\right)$$

O fluxo em  $y = \ell$  é

$$N_{y=\ell} = -D \frac{dC}{dy} \Big|_{y=\ell} = \frac{D\Phi C_0}{\ell}$$

ao passo que a taxa de liberação é

$$R = AN_{p=\ell} = \boxed{\frac{AD\Phi C_0}{\ell}}$$

Observe que o tempo não aparece na expressão destacada.

**Parte (b):** O tempo necessário para atingir-se um escoamento permanente é  $t = 0.5 = tD/\ell^2$ . Resolvendo para  $\ell$ , vem

$$\frac{tD}{\ell^2} = 0.5 \rightarrow \ell = \sqrt{\frac{tD}{0.5}}$$

$$\therefore \ell = \sqrt{\frac{600 \times (5 \times 10^{-9})}{0.5}} = \boxed{0.00245 \text{ cm}}$$

Em seguida, ajustando a expressão obtida na parte (a), a concentração  $C_0$  é

$$R = \frac{AD\Phi C_0}{\ell} \rightarrow C_0 = \frac{R\ell}{AD\Phi}$$

$$\therefore C_0 = \frac{(0.15/3600) \times 0.00245}{2 \times (5 \times 10^{-9}) \times 0.10} = \boxed{102 \text{ mg/cm}^3}$$

**Parte (c):** Após 10 horas, 1.5 mg de fármaco terá sido liberado. Supondo um volume de 1 cm<sup>3</sup>, isso corresponde a apenas  $1.5/102 \approx 1.5\%$  da quantidade inicial; portanto, o critério é respeitado.

### ■ Referências (★ → Livro altamente recomendado)

1. CHANDRAN, K.B.; RITTGERS, S.E.; YOGANATHAN, A.P. **Biofluid Mechanics: The Human Circulation**. 2. ed. CRC Press, 2012. ★
2. OSTADFAR, A. **Biofluid Mechanics: Principles and Applications**. Academic Press, 2016.
3. RUBENSTEIN, D.A.; YIN, W.; FRAME, M.D. **Biofluid Mechanics**. 3. Ed. Academic Press, 2022.
4. TRUSKEY, G.A.; YUAN, F.; KATZ, D.F. **Transport Phenomena in Biological Systems**. 2. ed. Pearson, 2009. ★
5. WAITE, L.; FINE, J. **Applied Biofluid Mechanics**. McGraw-Hill, 2007.
6. ZAMIR, M. **The Physics of Pulsatile Flow**. Springer, 2000.

#### Leituras adicionais

- ◆ FUNG, Y.C. **Biomechanics: Circulation**. 2. ed. Springer, 1997.
- ◆ ZAMIR, M. **Hemo-Dynamics**. Springer, 2016.

#### Artigos mencionados no Problema 12

- ◆ STERGIOPULOS, N.; WESTERHOF, B.E.; WESTERHOF, N. **Total arterial inertance as the fourth element of the windkessel model**. *Am J Physiol Heart Circ*, 276(1), p. H81 – H88. 1999. DOI: [10.1152/ajpheart.1999.276.1.H81](https://doi.org/10.1152/ajpheart.1999.276.1.H81)
- ◆ WESTERHOF, N; ELZINGA, G.. VAN DEN BOS, G.C. **Influence of central and peripheral changes on the hydraulic input impedance of the systemic arterial tree**. *Med Biol Eng*, 11, p. 710 – 723. 1973. DOI: [10.1007/BF02478659](https://doi.org/10.1007/BF02478659)

## ➔ Referências de cada problema

Problema	Ref.	Problema	Ref.
1	-	11	[1]
2	[2]	12	[3]
3	[2]	13	[1]
4	[5]	14	[4]
5	[4]	15	[3]
6	[4]	16	[4]
7	[1]	17	[4]
8	[3]	18	[4]
9	[5]	19	[4]
10	[4],[6]		

## ■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

**WhatsApp:** (61) 981247059

**Email:** [lucas\\_0150@hotmail.com](mailto:lucas_0150@hotmail.com)

