



Lista de Exercícios Resolvidos 5
Escoamentos Compressíveis – Parte 1
Lucas Monteiro Nogueira

Escoamentos Compressíveis – Parte 1
Escoamentos Isentrópicos
Ondas de Choque Normais
Ondas de Choque Oblíquas
Escoamentos Compressíveis – Parte 2
Expansões de Prandtl-Meyer
Escoamentos Compressíveis com Atrito (Fanno)
Escoamentos Compressíveis com Transf. de Calor (Rayleigh)

■ Lista de Problemas

► Parte 1: Escoamentos Isentrópicos

1. Verdadeiro/Falso – Fundamentos
2. Escoamento Isentrópico sem Tabelas
3. Uso de Tabelas de Escoamento Isentrópico
4. Bocal Estrangulado I
5. Bocal Estrangulado II
6. Bocal com Vapor d'Água
7. Bocal com Gás Desconhecido
8. Força em um Escoamento Isentrópico
9. Tubo de Pitot I
10. Tubo de Pitot II
11. Queda de Pressão na Cabine

► Parte 2: Ondas de Choque Normais

12. Transição Supersônico-Subsônico
13. Análise de Choques Normais I
14. Análise de Choques Normais II
15. Análise de Choques Normais III
16. Análise de Choques Normais IV
17. Análise Avançada de Choques em um Bocal I
18. Análise Avançada de Choques em um Bocal II

19. Análise de Choques em um Bocal – Unidades Imperiais

20. Choque Normal em um Difusor

21. Ondas Normais Não-Estacionárias I

22. Ondas Normais Não-Estacionárias II

23. Ondas Normais Não-Estacionárias III

► **Parte 3: Ondas de Choque Oblíquas**

24. Análise de Choques Oblíquos I

25. Análise de Choques Oblíquos II

26. Análise de Choques Oblíquos III

27. Análise de Choques Oblíquos IV

28. Choque Oblíquo com Onda Refletida

29. Choque Oblíquo em uma Cunha

30. Ondas de Choque Sucessivas I

31. Ondas de Choque Sucessivas II

32. Ondas de Choque Sucessivas III

33. Ondas de Choque Sucessivas IV

34. Ondas de Choque Sucessivas V

35. Penúltima Configuração Interessante

36. Última Configuração Interessante



Visite www.hoek.com.br
para mais materiais gratuitos
em engenharia e ciências!

Orientações Diversas



- Os cálculos de escoamentos isentrópicos unidimensionais e choques normais/oblíquos foram realizados com [este webapp](#) disponibilizado pelo site engineering.com.
- A parte final desse PDF contém tabelas para análise de escoamentos isentrópicos unidimensionais. As tabelas foram extraídas de John e Keith (2006).

■ Parte 1

■ Problema 1 (Verdadeiro/Falso – Fundamentos)

Com relação à teoria de escoamentos compressíveis isentrópicos, julgue os itens a seguir.

1. () A seção de teste de um túnel de vento supersônico é quadrada com lado 1.22 m. O número de Mach na seção de teste é 3.5, a temperatura é -100°C e a pressão é 20 kPa. A vazão mássica de ar atravessando a seção de teste é maior que 570 kg/sec.
2. () Um escoamento de ar a -10°C ocupa um túnel de vento supersônico. Uma fotografia Schlieren do escoamento revela um tênue padrão de ondas inclinadas em 40° relativamente à direção de escoamento. Podemos concluir que a velocidade do ar é maior que 515 m/s.

3.() Um gás tem massa molar igual a $44 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ e razão de calores $\gamma = 1.3$. Em certo ponto de um escoamento compressível e unidimensional desse gás, a pressão estática é 80 kPa e a temperatura estática é 15°C . O gás é expandido isentropicamente até atingir velocidade 300 m/s em uma seção arbitrária que denominamos 'seção 2'. Podemos concluir que a pressão estática do gás na seção 2 é maior que 35 kPa.

4.() Ainda acerca do processo descrito na assertiva anterior, podemos concluir que o número de Mach do escoamento na seção 2 é maior que 1.45.

5.() Um escoamento unidimensional compressível de hélio gasoso ($\gamma = 5/3$) passa por uma seção arbitrária com pressão estática 120 kPa, temperatura estática 20°C e velocidade 800 m/s. Podemos afirmar que a pressão de estagnação do gás é maior que 175 kPa e sua temperatura de estagnação é maior que 335 K. [Marque 'verdadeiro' apenas se **ambas** as afirmações forem verdadeiras.]

■ Problema 2 (Escoamento Isentrópico sem Tabelas)

Um escoamento de ar ocupa um bocal convergente-divergente com área de entrada 5 cm^2 e área de saída 3.8 cm^2 . Na seção de entrada a velocidade do ar é 100 m/s, a pressão estática é 680 kPa e a temperatura é 60°C . **Sem recorrer às tabelas de escoamento compressível isentrópico**, encontre a vazão mássica do escoamento no bocal. Em seguida, sem recorrer a qualquer tabela, determine também a pressão estática e a velocidade na saída do bocal.

■ Problema 3 (Uso de Tabelas de Escoamento Isentrópico)

Um escoamento de ar sob Mach 0.6 atravessa um conduto de área 50 cm^2 . A pressão estática é 50 kPa e a temperatura estática é 298 K. Determine a vazão mássica do escoamento.

■ Problema 4 (Bocal Estrangulado I)

Um bocal convergente-divergente com área de saída 0.12 m^2 é dimensionado para operar isentropicamente com ar sob Mach 1.75. Para pressão e temperatura na entrada do bocal respectivamente iguais a 5 MPa e 200°C , calcule o seguinte:

- (a)** A contrapressão máxima para estrangular o bocal.
- (b)** A vazão mássica em kg/sec para uma contrapressão de 101 kPa.

■ Problema 5 (Bocal Estrangulado II)

Um bocal convergente-divergente sem atrito é utilizado para acelerar um escoamento de ar oriundo de uma grande câmara. O bocal tem área de saída igual a 30 cm^2 e garganta de área igual a 15 cm^2 . Se a pressão ambiente ao redor do bocal é 101 kPa e a temperatura da câmara é 500 K, calcule o seguinte:

- (a)** A pressão mínima na câmara para estrangular o bocal.
- (b)** A vazão mássica para uma pressão na câmara igual a 400 kPa.

■ Problema 6 (Bocal com Vapor d'Água)

Busca-se expandir vapor d'água para Mach 2.0 em um bocal convergente-divergente com velocidade de entrada 100 m/s. A área de seção da entrada é 50 cm² e a temperatura estática na entrada é 500 K. Supondo escoamento isentrópico, determine as áreas necessárias na garganta e na saída do bocal. Note que o vapor em questão comporta-se como um gás ideal com $\gamma = 1.3$ e $R = 461.5 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$.

■ Problema 7 (Bocal com Gás Desconhecido)

Considere um gás de massa molar 18 g/mol e calor específico a pressão constante $c_p = 2.0 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$. Partindo de uma velocidade inicial desprezível, o gás é expandido isentropicamente ao longo de um bocal convergente-divergente com razão de áreas igual a 5.0. A pressão e temperatura estáticas iniciais são respectivamente iguais a 1 MPa e 1000 K. Qual é a velocidade do gás na saída do bocal?

■ Problema 8 (Força em um Escoamento Isentrópico)

O difusor de um turbojato opera a 10,000 m de altitude sob vazão mássica de 25 kg/s. A velocidade de entrada é 200 m/s, a pressão estática de entrada é $0.35 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e a temperatura estática de entrada é 230 K. A área da saída do difusor é 0.5 m². Supondo escoamento sem atrito, calcule a força de reação resultante que atua no difusor se o número de Mach na saída é 0.2.

■ Problema 9 (Tubo de Pitot I)

Um tubo de Pitot estático é inserido em um escoamento subsônico de ar. A temperatura e pressão estáticas do escoamento de ar são 30°C e 101 kPa, respectivamente. Utiliza-se um manômetro para mensurar a diferença entre a pressão de Pitot e a pressão manométrica, e o resultado é 250 mmHg (milímetros de mercúrio). Encontre a velocidade do ar **(a)** se o escoamento é suposto incompressível; e **(b)** se efeitos de compressibilidade são levados em conta.

■ Problema 10 (Tubo de Pitot II)

Um tubo de Pitot indica uma pressão de 155 kPa quando é exposto a um escoamento de ar com Mach 0.7 e temperatura 15°C. Encontre a pressão estática do escoamento. Determine também a temperatura de estagnação do escoamento.

■ Problema 11 (Queda de Pressão na Cabine)

Uma aeronave voa a altitude de 12,000 m, na qual a pressão atmosférica é aproximadamente igual a 19.39 kPa. O volume interno da aeronave é 860 m³. Se uma janela circular de 12 cm de diâmetro se quebrou subitamente e expôs o interior da cabine à atmosfera, qual será o tempo necessário para que a pressão da cabine decaia de 101 kPa para 40% desse valor? Suponha que o buraco na janela age como um bocal convergente e que a temperatura no interior da aeronave é constante e igual a 20°C.



■ Parte 2

■ Problema 12 (Transição Supersônico-Subsônico)

Um escoamento de ar ($\gamma = 1.4$) adentra um conduto com número de Mach $M_1 = 2.0$ e o deixa com $M_2 = 0.25$. A razão entre a área saída e a área de entrada é $A_2/A_1 = 3.0$.

(a) Encontre a razão de pressões estáticas p_2/p_1 .

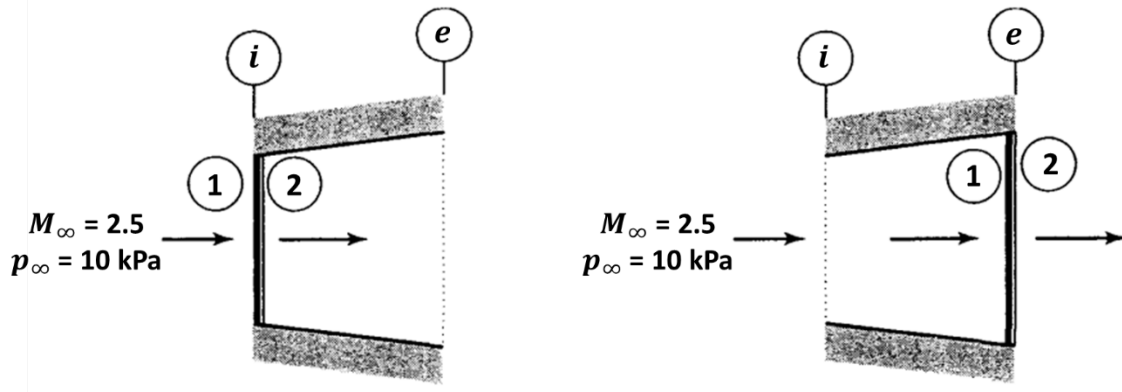
(b) Determine a razão de pressões de estagnação p_{02}/p_{01} .

■ Problema 13 (Análise de Choques Normais I)

Um escoamento de hélio com velocidade de 2500 m/s e temperatura estática 300 K sofre um choque normal. Determine a velocidade do hélio a jusante (após) da onda. Calcule também as temperaturas estática e de estagnação a jusante do choque. Suponha que o hélio comporta-se como um gás ideal com $\gamma = 5/3$ e $R = 2077 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$.

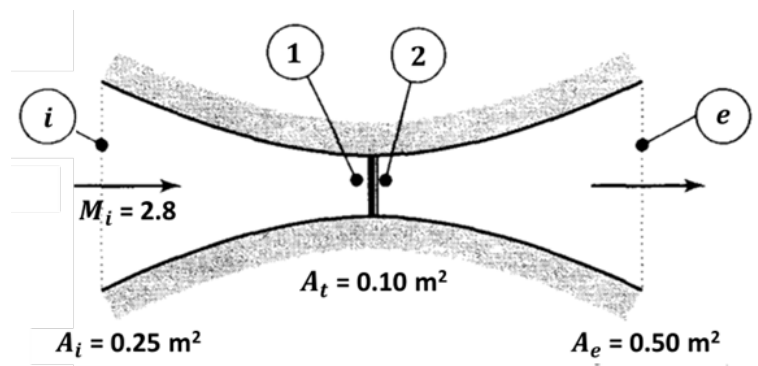
■ Problema 14 (Análise de Choques Normais II)

Um choque normal estacionário ocorre na entrada de um difusor supersônico, como mostra a figura à esquerda. A razão de áreas é 3.0. Encontre o número de Mach M_e na saída do difusor, a pressão estática p_e na saída do difusor e a perda de pressão de estagnação ($p_{0i} - p_{0e}$). Repita os cálculos supondo que o choque ocorre na saída do difusor (figura à direita).



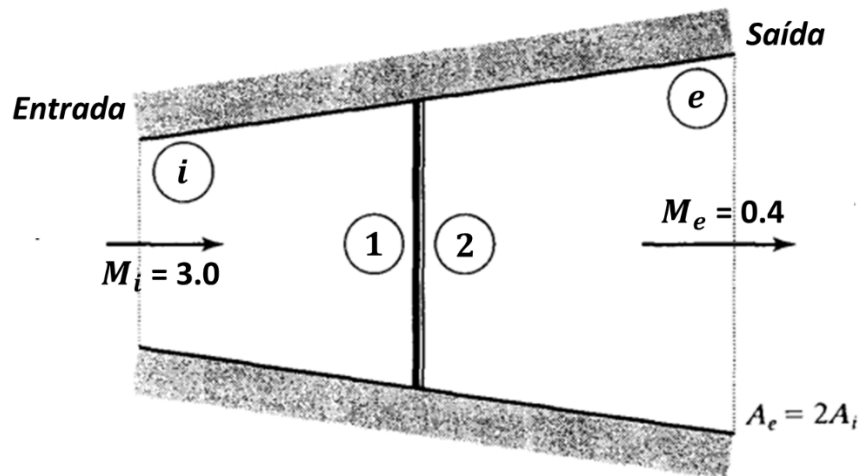
■ Problema 15 (Análise de Choques Normais III)

Um escoamento de ar ($\gamma = 1.4$) atravessa um difusor convergente-divergente com número de Mach 2.8, pressão estática p_i igual a 100 kPa e temperatura estática 20°C. Um choque normal estacionário ocorre na garganta do difusor, como ilustra a figura ao lado. Encontre a velocidade, a pressão estática e a pressão de estagnação na saída, 'e'.



■ Problema 16 (Análise de Choques Normais IV)

Um escoamento supersônico sob Mach 3.0 de um gás com $\gamma = 1.4$ deve ser desacelerado por meio de um choque normal em um canal divergente. Para as condições mostradas na figura a seguir, determine p_2/p_1 e p_e/p_i .



■ Problema 17 (Análise Avançada de Choques em um Bocal I)

Um bocal supersônico com razão de áreas (saída sobre garganta) igual a 3.0 é alimentado por um grande reservatório de ar. A saída do bocal é exposta à atmosfera (=101 kPa). Determine o intervalo de pressões para o qual um choque normal aparecerá no bocal. Para qual valor de pressão no reservatório será o bocal perfeitamente expandido (isto é, sem a formação de choques), com a ocorrência de escoamento supersônico no plano de saída? Encontre também a pressão de reservatório mínima para obter um escoamento sônico na garganta do bocal.

■ Problema 18 (Análise Avançada de Choques em um Bocal II)

Um bocal convergente-divergente com razão de áreas (saída sobre garganta) de 3.0 transporta ar ($\gamma = 1.4$) entre um reservatório de alta pressão e uma região de contrapressão p_b . Sob determinadas condições, um choque normal é observado no bocal em uma seção cuja área é igual a 2.2 vezes a área da garganta. Determine a redução percentual na contrapressão p_b necessária para que o choque desapareça.

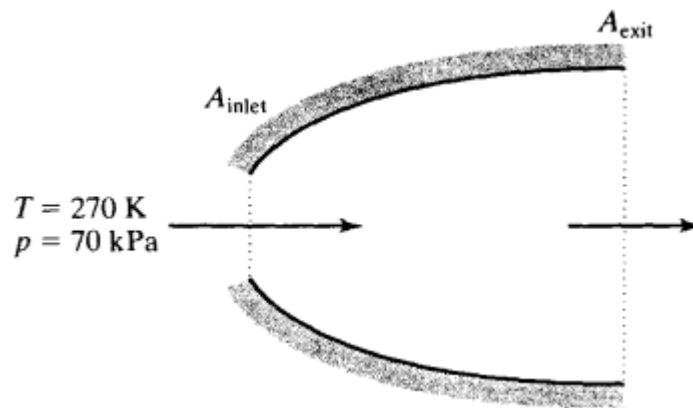
■ Problema 19 (Análise de Choques em um Bocal – Unidades Imperiais)

Um bocal convergente-divergente recebe ar de um tanque a 100 psia e 600°R. A pressão é 28.0 psia imediatamente a montante de um choque plano localizado na seção divergente. O número de Mach na saída é 0.5 e a vazão mássica é 10 lbm/sec. Determine:

- (a) a área da garganta;
- (b) a área da seção onde é localizado o choque;
- (c) a pressão de saída necessária para operar o bocal sob as condições descritas acima;
- (d) a área da seção na saída do bocal;
- (e) o número de Mach de dimensionamento.

■ Problema 20 (Choque Normal em um Difusor)

Uma aeronave turbojato utiliza uma passagem divergente como difusor de ar (ilustração a seguir). Para um número de Mach em vôo igual a 1.92, determine o intervalo de contrapressões para que um choque normal ocorra no difusor. A pressão e temperatura externas são 70 kPa e 270 K, respectivamente. Determine também as vazões mássicas escoadas pelo difusor no intervalo de contrapressões obtido. A área de entrada é $A_{inlet} = 100 \text{ cm}^2$ e a área de saída é $A_{saída} = 200 \text{ cm}^2$. Suponha escoamento isentrópico, exceto na região dos choques.

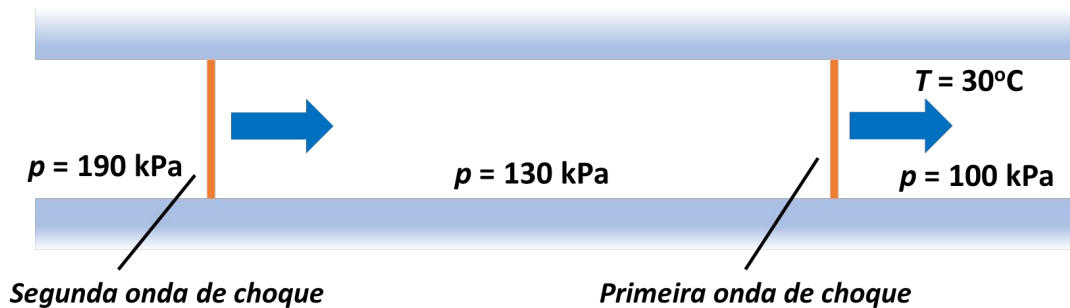


■ Problema 21 (Ondas Normais Não-Estacionárias I)

Uma onda de choque se propaga em um duto horizontal de área constante preenchido com ar de pressão e temperatura estáticas respectivamente iguais a 101.3 kPa e 25°C. Se a razão de pressões ao longo da onda é 3, encontre a velocidade do choque e a velocidade do ar a jusante do choque.

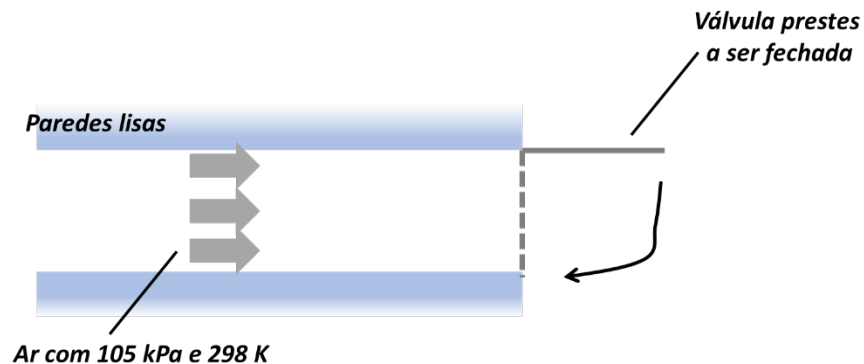
■ Problema 22 (Ondas Normais Não-Estacionárias II)

Devido à ocorrência de uma reação química rápida, uma onda de choque normal é gerada ao longo de um duto longo preenchido com ar a 100 kPa e 30°C. A pressão a montante dessa onda é 130 kPa. Meio segundo após o surgimento da referida onda, um segundo choque é gerado por uma nova reação química. A segunda onda segue a primeira ao longo do duto; a pressão atrás da segunda onda é 190 kPa. Encontre a velocidade do ar e a temperatura estática a montante da segunda onda. Obtenha também a distância entre as duas ondas 0.7 segundos após o surgimento da primeira onda.



■ Problema 23 (Ondas Normais Não-Estacionárias III)

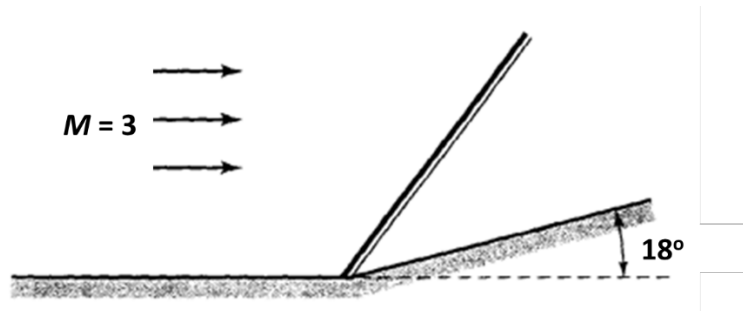
Ar com pressão 105 kPa e temperatura 25°C escoava ao longo de um duto com velocidade de 250 m/s. Uma válvula na extremidade do duto é subitamente fechada. Encontre a pressão que atua na válvula imediatamente após o fechamento.



■ Parte 3

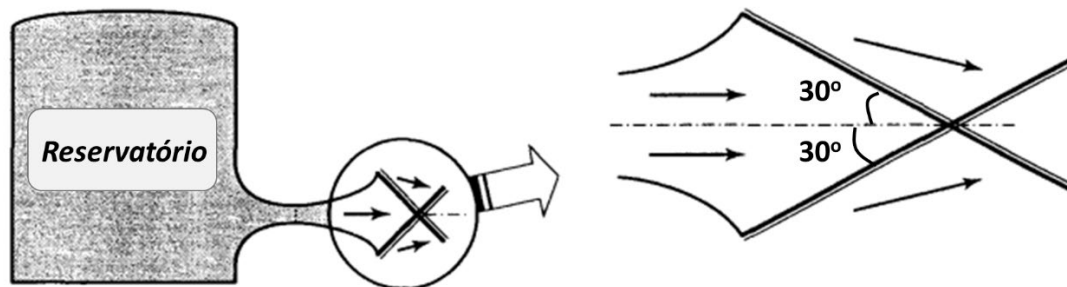
■ Problema 24 (Análise de Choques Oblíquos I)

Um escoamento de ar sob Mach 3 passa por um declive côncavo de 18° , como mostra a figura a seguir. A pressão e temperatura no escoamento supersônico a montante do choque são respectivamente 75 kPa e 293 K. Determine os componentes da velocidade e dos números de Mach a montante e a jusante do choque. Encontre também as razões de pressões estáticas e de estagnação ao longo da onda. Qual deve ser a inclinação do canto a fim que o choque seja desacoplado do declive? Em suas respostas, considere apenas soluções para choques fracos.



■ Problema 25 (Análise de Choques Oblíquos II)

Ondas de choque oblíquas aparecem na saída de um bocal supersônico, como mostra a figura a seguir. O fluido em uso é ar. A temperatura de estagnação do escoamento é 520 K. A área de seção da garganta do bocal é 60 cm^2 e a área da saída é 180 cm^2 . **(a)** Sabendo que a contrapressão do bocal é 101 kPa, determine a pressão de estagnação na entrada do bocal. **(b)** Encontre a velocidade no plano de saída do bocal. **(c)** Encontre a vazão mássica no bocal.



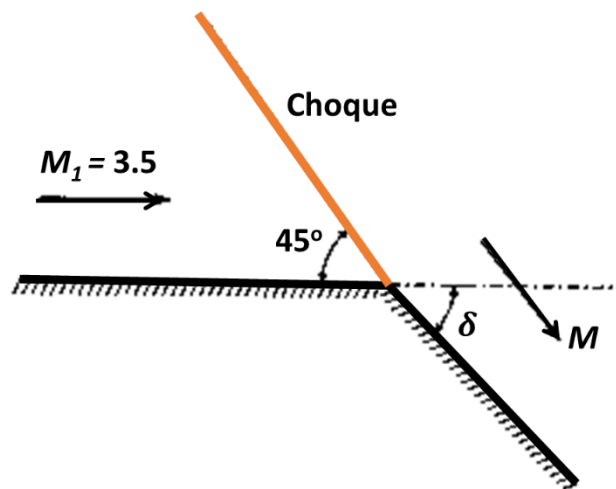
■ Problema 26 (Análise de Choques Oblíquos III)

Um escoamento supersônico de ar sob Mach 2.0 passa por uma cunha, formando um choque oblíquo, atrelado à cunha, que subtende 40° na direção do escoamento. A pressão e temperatura estáticas no escoamento livre são $0.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e 0°C , respectivamente. Julgue os itens a seguir.

1. () A pressão estática a jusante do choque oblíquo é maior que 86 kPa.
2. () A temperatura estática a jusante do choque oblíquo é maior que 350 K.
3. () O número de Mach do escoamento a jusante da cunha é maior que 1.4.
4. () O ângulo da cunha é maior que 24° .

■ Problema 27 (Análise de Choques Oblíquos IV)

Um choque oblíquo incide em uma transição súbita, como ilustra a figura a seguir. A transição deve ser tal que não haja onda refletida após o escoamento atravessá-la. Para tanto, determine o ângulo θ e o número de Mach M .

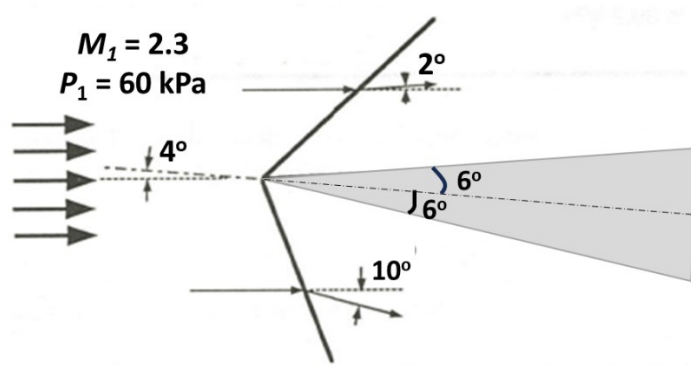


■ Problema 28 (Choque Oblíquo com Onda Refletida)

Uma cunha bidimensional simétrica de ângulo cônico 12° é exposta a um escoamento de ar com número de Mach 2.3 e pressão 60 kPa. Se o eixo de simetria da cunha perfaz um ângulo de 4° com a direção do escoamento, encontre a diferença entre as pressões estáticas exercidas acima e abaixo da superfície da cunha.

■ Problema 29 (Choque Oblíquo em uma Cunha)

Uma cunha bidimensional simétrica de ângulo cônico 12° é exposta a um escoamento de ar com número de Mach 2.3 e pressão 60 kPa. Se o eixo de simetria da cunha perfaz um ângulo de 4° com a direção do escoamento, encontre a diferença entre as pressões estáticas exercidas acima e abaixo da superfície da cunha.

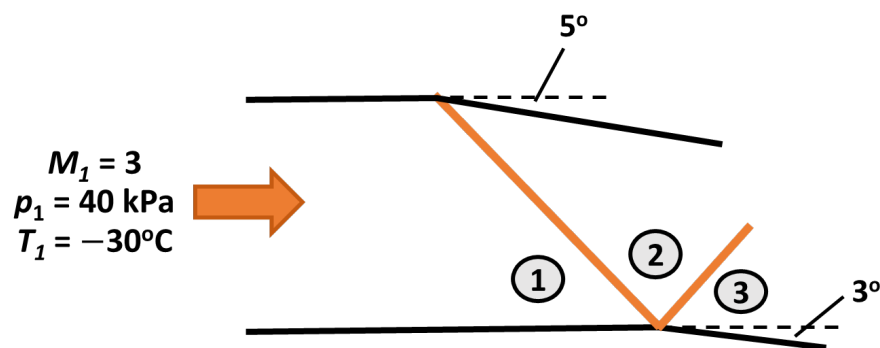


■ Problema 30 (Ondas de Choque Sucessivas I)

Ar sob pressão e temperatura estáticas respectivamente iguais a 40 kPa e -30°C flui com número de Mach 3 no interior de um duto. A parede superior do conduto curva-se subitamente em 5° , formando um choque oblíquo como mostra a figura a seguir.

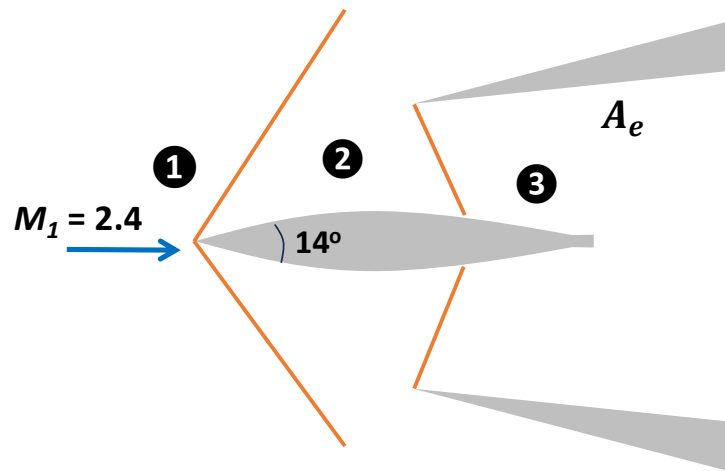
(a) Encontre o número de Mach, a temperatura estática e a pressão estática a jusante desse choque.

(b) Como mostra a figura, a onda de choque analisada em (a) incide sobre a parede inferior do duto exatamente em um ponto onde a parede inferior do duto curva-se 2° para longe do escoamento. Encontre o número de Mach, a pressão estática e a temperatura na região 3.



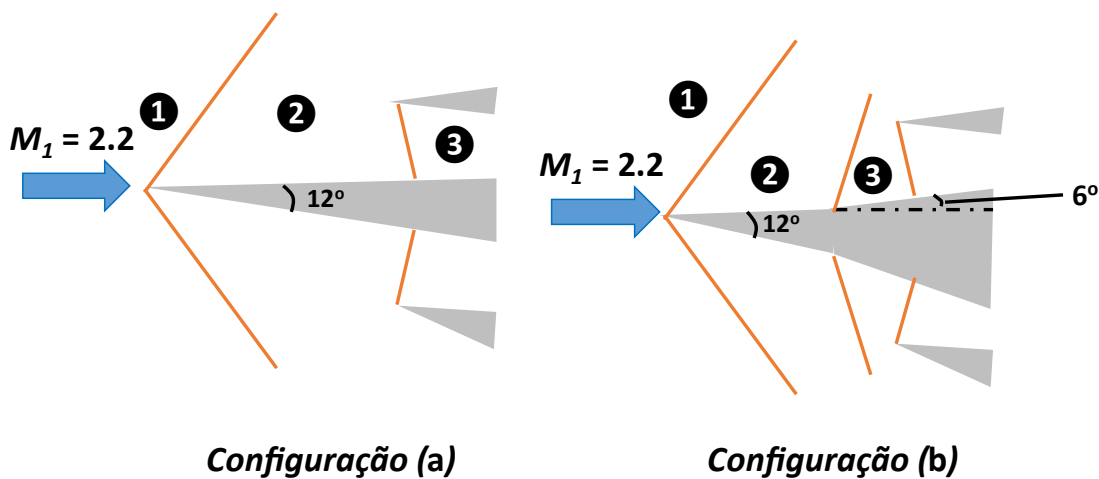
■ Problema 31 (Ondas de Choque Sucessivas II)

Um dispositivo de entrada supersônico é dimensionado para receber ar sob Mach 2.4 com pressão e temperatura estáticas respectivamente iguais a $0.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e 280 K, como mostra a figura a seguir. **(a)** Determine a área de entrada A_3 a fim que o dispositivo escoe 20 kg/s de ar. **(b)** O difusor deve desacelerar ainda mais o escoamento a montante do choque normal a fim que a velocidade do ar adentrando o compressor não exceda 30 m/s. Supondo escoamento isentrópico a jusante do choque normal, determine a área A_e necessária e a pressão estática p_e nessa seção.



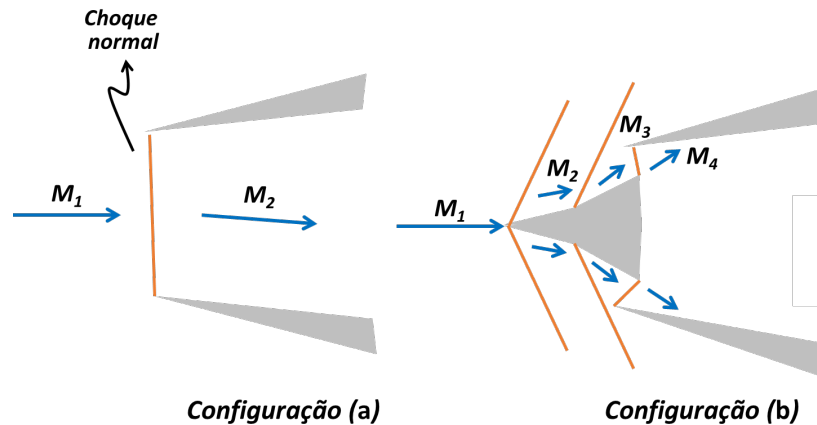
■ Problema 32 (Ondas de Choque Sucessivas III)

Compare a queda de pressão sofrida pelos sistemas **(a)** e **(b)** na figura a seguir.



■ Problema 33 (Ondas de Choque Sucessivas IV)

Um canal supersônico é dimensionado para operar sob Mach 3.0. Duas possibilidades são consideradas, como ilustrado nas figuras (a) e (b) a seguir. Na configuração (a), a compressão e desaceleração do escoamento se dá através de um único choque normal. Na configuração (b), utiliza-se um difusor em forma de cunha e a desaceleração é obtida através de dois choques oblíquos seguidos por um choque normal. Os ângulos de viragem são de 8° para cada um dos dois choques oblíquos. Compare a queda de pressão de estagnação registrada nos dois sistemas.



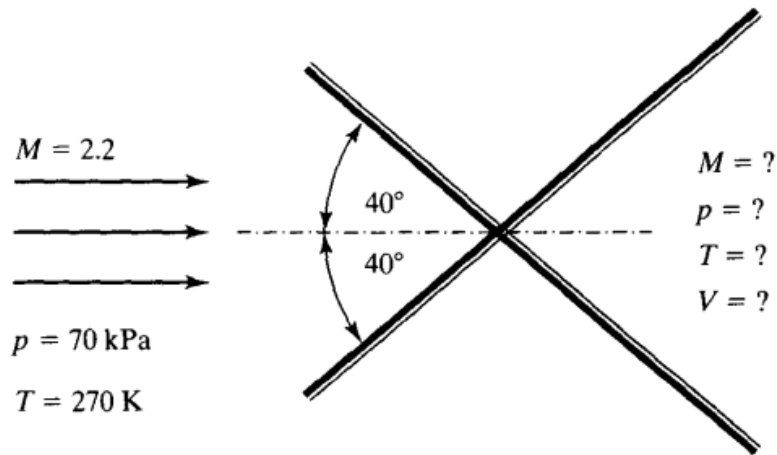
■ Problema 34 (Ondas de Choque Sucessivas V)

Um motor ramjet é acoplado a uma pequena aeronave que opera sob número de Mach 4 em uma altitude na qual a pressão é 30 kPa e a temperatura é -45°C . O ar entrando no motor é desacelerado a velocidades subsônicas ao atravessar dois choques oblíquos consecutivos, cada um dos quais envolve ângulos de viragem de 15° , seguidos por uma onda de choque normal. Após atravessar a onda normal, o escoamento é isentropicamente desacelerado a Mach 0.1 antes de adentrar a câmara de combustão. Encontre os valores de pressão e temperatura na entrada da câmara de combustão.

■ Problema 35 (Penúltima Configuração Interessante)

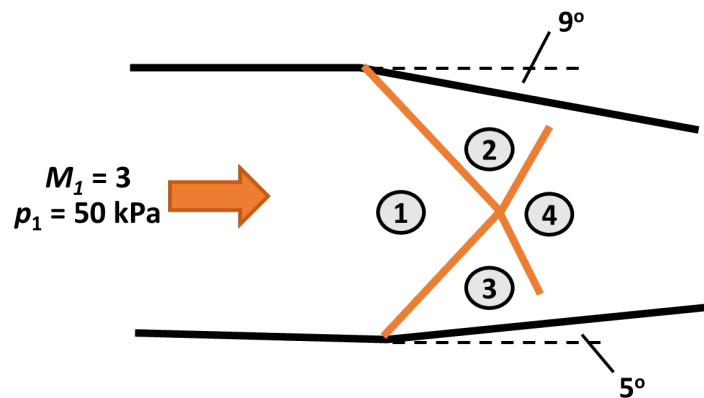
Dois choques oblíquos se interceptam conforme ilustrado na figura a seguir.

Determine as propriedades do escoamento após a interseção sabendo que $\gamma = 1.4$.



■ Problema 36 (Última Configuração Interessante)

Se o número de Mach e a pressão a montante do sistema de choques oblíquos ilustrado a seguir são respectivamente iguais a 3 e 50 kPa, encontre a pressão estática na região 4, isto é, a jusante da interseção de choques oblíquos. O fluido empregado é um gás com $\gamma = 1.4$.



■ Soluções

■ Prob. 1

1. Falso. Primeiramente, a velocidade do som no túnel de vento é

$$a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 173} = 263.7 \text{ m/s}$$

ao passo que a velocidade de escoamento é

$$V = Ma = 3.5 \times 263.7 = 923.0 \text{ m/s}$$

A densidade do ar no túnel de vento é dada por

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{20,000}{287 \times 173} = 0.403 \text{ kg/m}^3$$

Segue que a vazão mássica no túnel de vento é

$$\dot{m} = \rho VA = 0.403 \times 923.0 \times (1.22 \times 1.22) = \boxed{553.6 \text{ kg/s}}$$

2. Falso. Supondo que as ondas em questão são ondas de Mach, o valor de M do escoamento é tal que

$$M = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 40^\circ} = 1.556$$

Em seguida, determina-se a velocidade do escoamento,

$$V = Ma = M \sqrt{\gamma RT} = 1.556 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 263} = \boxed{505.8 \text{ m/s}}$$

3. Verdadeiro. Aplicando a equação da energia entre duas seções arbitrárias '1' e '2' do escoamento, tem-se

$$\begin{aligned} V_1^2 + 2c_p T_1 &= V_2^2 + 2c_p T_2 \\ \therefore V_1^2 + \frac{2\gamma R}{\gamma - 1} T_1 &= V_2^2 + \frac{2\gamma R}{\gamma - 1} T_2 \end{aligned}$$

Usando os valores fornecidos e resolvendo para a temperatura estática T_2 ,

$$100^2 + \frac{2 \times 1.3 \times (8314.3/44)}{1.3 - 1} \times 288 = 300^2 + \frac{2 \times 1.3 \times (8314.3/44)}{1.3 - 1} \times T_2$$

$$\therefore 481,650 = 90,000 + 1637.7T_2$$

$$\therefore T_2 = \frac{481,650 - 90,000}{1637.7} = 239.1 \text{ K}$$

Em seguida, recorreremos à relação entre pressões e temperaturas para um processo isentrópico e escrevemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\therefore p_2 = 80 \times \left(\frac{239.1}{288} \right)^{\frac{1}{1.3-1}} = \boxed{43.02 \text{ kPa}}$$

4. Falso. Todos os parâmetros necessários para computar o número de Mach M_2 estão disponíveis ou foram determinados na assertiva anterior; assim sendo,

$$M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_2}{\sqrt{\gamma RT_2}} = \frac{300}{\sqrt{1.3 \times (8314.3/44) \times 239.1}} = \boxed{1.238}$$

5. Falso. Para He gasoso, tem-se $\gamma = 5/3$ e $R = 8314.3/4.0 = 2078.6 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. O número de Mach na seção de interesse é tal que

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{800}{\sqrt{(5/3) \times 2078.6 \times 293}} = 0.794 \approx 0.8$$

Entrando com esse número de Mach e $\gamma = 5/3$ na tabela do apêndice extraímos a razão de pressões $p/p_0 = 0.6167$ e a razão de temperaturas $T/T_0 = 0.8242$. Segue que a pressão de estagnação p_0 é

$$p_0 = \frac{120}{0.6167} = \boxed{194.6 \text{ kPa}}$$

ao passo que a temperatura de estagnação T_0 é

$$T_0 = \frac{293}{0.8242} = \boxed{355.5 \text{ K}}$$

■ Prob. 2

Primeiramente, utilizamos as informações fornecidas para calcular a densidade do ar na entrada (subscrito '1') do bocal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{680 \times 10^3}{287 \times 333} = 7.115 \text{ kg/m}^3$$

Em seguida, computamos a vazão mássica \dot{m} ,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 7.115 \times 100 \times (5 \times 10^{-4}) = \boxed{0.356 \text{ kg/s}}$$

Supondo que o escoamento é permanente, a vazão mássica será a mesma em todas as seções transversais do bocal; destarte, podemos escrever, utilizando o subscrito '2' para fazer referência à saída do bocal,

$$\dot{m} = \text{cte.} \rightarrow \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

ou

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_2}{V_1} \frac{A_2}{A_1} = 1$$

Lembrando que $V = M \times a$,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \times \left(\frac{M_2}{M_1} \times \frac{a_2}{a_1} \right) \times \frac{A_2}{A_1} = 1$$

$$\therefore \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{M_2}{M_1} \times \frac{a_2}{a_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Lembrando que $a \propto T^{1/2}$,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{M_2}{M_1} \times \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{(I)}$$

Mas sabemos que as seguintes expressões relacionam as temperaturas, densidades e Machs em um escoamento compressível unidimensional,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_2^2} ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[\frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_2^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Substituindo em **(I)**,

$$\left[\frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_2^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \times \frac{M_2}{M_1} \times \left[\frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{A_1}{A_2}$$

Somando expoentes,

$$\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}$$

Portanto,

$$\frac{M_2}{M_1} \left[\frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_2^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{A_1}{A_2} \quad (\text{II})$$

O número de Mach M_1 na entrada é tal que

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{100}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 333}} = 0.273$$

Substituindo em **(II)**,

$$\frac{M_2}{0.273} \times \left[\frac{1 + \left(\frac{1.4-1}{2}\right) \times 0.273^2}{1 + \left(\frac{1.4-1}{2}\right) M_2^2} \right]^{\frac{1.4+1}{2 \times (1.4-1)}} = \frac{5.0}{3.8}$$

$$\therefore \frac{2.907 M_2}{(1 + 0.2 M_2^2)^3} - 1 = 0$$

Podemos resolver a equação em M_2 acima utilizando variáveis simbólicas no MATLAB:

```
syms M2
expr = 2.907*M2/(1 + 0.2*M2^2)^3 - 1 == 0;
digits(3)
vpasolve(expr, M2)
```

O código acima retorna as seguintes soluções:

```
ans =
    0.374
    2.0
 - 2.0 - 2.59i
 - 2.0 + 2.59i
 0.813 - 3.88i
 0.813 + 3.88i
```

As soluções imaginárias não têm significado físico. As soluções que nos interessam são $M_2 = 0.374$ e $M_2 = 2.0$; a primeira destas é menor que 1 e descreve um escoamento subsônico, ao passo que a segunda é maior que 1 descreve um escoamento supersônico. Em seguida, retornamos à razão de temperaturas e escrevemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M_2^2} \rightarrow \frac{T_2}{333} = \frac{1 + \left(\frac{1.4-1}{2}\right) \times 0.273^2}{1 + \left(\frac{1.4-1}{2}\right)M_2^2}$$

Resolvendo para T_2 e substituindo $M_2 = 0.374$, obtemos $T_2 = 328.8$ K. Analogamente, podemos resolver para T_2 e substituir $M_2 = 2.0$ para obter $T_2 = 187.8$ K. Em seguida, usando a relação entre pressão e temperatura para escoamentos isentrópicos, escrevemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow p_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_1$$

$$\therefore p_2 = 680 \times \left(\frac{T_2}{333}\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}$$

Substituindo $T_2 = 328.8$ K, obtemos $p_2 = 650.5$ kPa. Analogamente, substituímos $T_2 = 187.8$ K para obter $p_2 = 91.60$ kPa. Finalmente, lembrando que velocidade = número de Mach \times velocidade do som, tem-se

$$V_2 = M_2 a_2 = M_2 \sqrt{\gamma R T_2} = M_2 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times T_2}$$

Usando a solução subsônica, substituímos $M_2 = 0.374$ e $T_2 = 328.8$ K para obter

$$V_2 = 0.374 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 328.8} = \underline{135.9 \text{ m/s}}$$

Usando a solução supersônica, substituímos $M_2 = 2.0$ e $T_2 = 187.8$ K para obter

$$V_2 = 2.0 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 187.8} = \underline{549.4 \text{ m/s}}$$

■ Prob. 3

O primeiro passo é determinar a densidade do ar que esco,

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{50,000}{287 \times 298} = 0.585 \text{ kg/m}^3$$

e também a velocidade,

$$V = M \sqrt{\gamma R T} = 0.6 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 298} = 207.6 \text{ m/s}$$

A vazão mássica correspondente é então

$$\dot{m} = \rho A V = 0.585 \times (50 \times 10^{-4}) \times 207.6 = \boxed{0.607 \text{ kg/s}}$$

■ Prob. 4

Parte (a): Para $M = 1.75$, podemos recorrer à tabela no fim do documento e ler a razão de áreas A/A^* correspondente. Como a tabela não possui uma linha para $M = 1.75$, o melhor que podemos fazer é interpolar entre o valor para $M = 1.74$, que é $A/A^* = 1.3764$, e o valor para $M = 1.76$, que é $A/A^* = 1.3967$. A interpolação pode ser realizada com o comando *interp1* do MATLAB:

```
>> interp1([1.74, 1.76], [1.3764, 1.3967], 1.75)
```

```
ans =  
    1.3866
```

A interpolação resulta em $A/A^* = 1.3866$. O número de Mach subsônico que corresponde a $A/A^* = 1.3866$ também pode ser obtido por interpolação. Recorrendo à tabela do apêndice, as entradas mais próximas que temos são $A/A^* = 1.3801$, que corresponde a $M = 0.48$, e $A/A^* = 1.4246$, que corresponde a $M = 0.46$. Interpolando linearmente com o MATLAB, temos:

```
>> interp1([1.4246, 1.3801], [0.46, 0.48], 1.3866)
```

```
ans =  
    0.4771
```

Portanto, $M = 0.4771$. Entramos com esse número de Mach na tabela de escoamento compressível para ler a razão de pressões p/p_o . Como não dispomos de p/p_o para esse número de Mach, faz-se necessária uma terceira interpolação. Recorrendo à tabela, as entradas mais próximas que temos são $M = 0.46$, que corresponde a $p/p_o = 0.8650$, e $M = 0.48$, que corresponde a $p/p_o = 0.8541$. Utilizamos *interp1* novamente para obter

```
>> interp1([0.46, 0.48], [0.865, 0.8541], 0.4771)
```

```
ans =  
    0.8557
```

Portanto, $p/p_o = 0.8557$. Segue que a contrapressão p máxima para estrangular o bocal é

$$p = 0.8557 p_o = 0.8557 \times 5 = \boxed{4.279 \text{ MPa}}$$

Parte (b): Como obtido na parte (a), sabemos que a contrapressão máxima para estrangular o bocal é 4.279 MPa. Como $101 \text{ kPa} < 4.279 \text{ MPa}$, o bocal está estrangulado e podemos usar a razão de áreas $A/A^* = 1.3866$ obtida na parte (a). Portanto, com $A/A^* = 1.3866$ e $A = 0.12 \text{ m}^2$, a área A^* da seção da garganta é tal que

$$\frac{A}{A^*} = 1.3866 \rightarrow A^* = \frac{A}{1.3866}$$

$$\therefore A_{\text{garg}} = \frac{0.12}{1.3866} = 0.0865 \text{ m}^2$$

Ademais, sabemos que, para Mach 1, $p/p_0 = 0.5283$ e $T/T_0 = 0.8333$ (convém decorar essas razões, caso você ainda não o tenha feito). Sendo $p_0 = 5 \text{ MPa}$ e $T_0 = 473 \text{ K}$, tem-se

$$\frac{p}{p_0} = 0.5283 \rightarrow p_{\text{garg}} = 0.5283 \times 5 = 2.642 \text{ MPa}$$

$$\frac{T}{T_0} = 0.8333 \rightarrow T_{\text{garg}} = 0.8333 \times 473 = 394.2 \text{ K}$$

A velocidade de escoamento na garganta é

$$V_{\text{garg}} = \sqrt{\gamma RT_{\text{garg}}} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 394.2} = 398.0 \text{ m/s}$$

e a densidade do ar na garganta é obtida pela equação dos gases ideais,

$$\rho_{\text{garg}} = \frac{p_{\text{garg}}}{RT_{\text{garg}}} = \frac{2,642,000}{287 \times 394.2} = 23.35 \text{ kg/m}^3$$

Por fim, a vazão mássica que procuramos é

$$\dot{m} = \rho_{\text{garg}} A_{\text{garg}} V_{\text{garg}} = 23.35 \times 0.0865 \times 398.0 = \boxed{803.87 \text{ kg/s}}$$

■ Prob. 5

Parte (a): A razão entre área de saída $A = 30 \text{ cm}^2$ e a área da garganta $A^* = 15 \text{ cm}^2$ é $A/A^* = 2.0$. Entrando com esse valor na tabela disponível ao fim do documento, extraímos o número de Mach $M = 0.3059$ e a razão de pressões $p/p_0 = 0.9372$. Segue que a pressão mínima na câmara para estrangular o bocal é

$$p_{\text{min}} = \frac{p}{0.9372} = \frac{101}{0.9372} = \boxed{107.77 \text{ kPa}}$$

Parte (b): Sendo $400 > 107.77$, o bocal está estrangulado. Lembrando que, para Mach 1, tem-se $p/p_0 = 0.5283$ e $T/T_0 = 0.8333$, a pressão e temperatura na garganta são tais que

$$p_{\text{garg}} = 0.5283 \times 400 = 211.32 \text{ kPa}$$

$$T_{\text{garg}} = 0.8333 \times 500 = 416.65 \text{ K}$$

A velocidade de escoamento na garganta, por sua vez, é

$$V_{\text{garg}} = \sqrt{\gamma RT_{\text{garg}}} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 416.65} = 409.16 \text{ m/s}$$

Precisamos também da densidade do ar que atravessa a garganta,

$$\rho_{\text{garg}} = \frac{p_{\text{garg}}}{RT_{\text{garg}}} = \frac{211,200}{287 \times 416.65} = 1.766 \text{ kg/m}^3$$

Finalmente, calculamos a vazão mássica desejada,

$$\dot{m} = \rho_{\text{garg}} A_{\text{garg}} V_{\text{garg}} = 1.766 \times (15 \times 10^{-4}) \times 409.16 = \boxed{1.084 \text{ kg/s}}$$

■ Prob. 6

Primeiramente, determinamos o número de Mach na entrada,

$$M_i = \frac{V_i}{\sqrt{\gamma RT_i}} = \frac{100}{\sqrt{1.3 \times 461.5 \times 500}} = 0.1826$$

A tabela do apêndice para $\gamma = 1.3$ não fornece razões de área A/A^* para $M_i = 0.1826$. Sendo $A/A^* = 3.9522$ quando $M_i = 0.15$ e $A/A^* = 2.9940$ quando $M_i = 0.20$, interpolamos entre os dois valores com MATLAB,

```
>> interp1([0.15, 0.20], [3.9522, 2.9940], 0.1826)
```

ans =

3.3275

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
0.15	0.9966	0.9855	0.9888	3.9522
0.20	0.9940	0.9744	0.9803	2.9940

Tem-se, portanto, que $A/A^* = 3.3275$. Podemos utilizar esse resultado para determinar a área da garganta,

$$A_{\text{garg}} = \frac{50}{3.3275} = \boxed{15.03 \text{ cm}^2}$$

Em seguida, lembrando que $M = 2.0$ na saída do bocal, podemos recorrer novamente à tabela e ler $A/A^* = 1.7732$. Resta apenas calcular a área de seção da saída,

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_{\text{saída}}}{A_{\text{garg}}} = 1.7732 \rightarrow A_{\text{saída}} = 1.7732 A_{\text{garg}}$$

$$\therefore A_{\text{saída}} = 1.7732 \times 15.03 = \boxed{26.65 \text{ cm}^2}$$

■ Prob. 7

Primeiramente, convém calcular a constante R específica para o gás em questão,

$$R = \frac{8314.3 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{mol}\cdot\text{K})}{18 \text{ kg}/(\text{kg}\cdot\text{mol})} = 461.91 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$$

Em seguida, sabendo que o calor específico a pressão constante c_p é igual a 2.0 kJ/(kg·K), podemos recorrer à definição de c_p e obter a razão de calores γ do gás em foco,

$$\begin{aligned}c_p &= \frac{R\gamma}{\gamma-1} \rightarrow 2000 = \frac{461.91 \times \gamma}{\gamma-1} \\ \therefore \frac{2000}{461.91} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \\ \therefore 4.30 &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \\ \therefore \gamma &\approx 1.30\end{aligned}$$

Não é coincidência que a razão de calores γ é idêntica ao valor ≈ 1.30 tipicamente associado a vapor d'água, porquanto a massa molar do $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ também é 18 g/mol. Sendo $\gamma = 1.30$, é cabível recorrer à tabela do apêndice; buscamos o número de Mach e a temperatura estática correspondentes a uma razão de áreas $A/A^* = 5.0$. Como de praxe, utilizamos o comando *interp1* to MATLAB,

```
>> interp1([4.8754, 5.1598], [2.95, 3.0], 5.0)
```

```
ans =  
    2.9719
```

```
>> interp1([4.8754, 5.1598], [0.4338, 0.4255], 5.0)
```

```
ans =  
    0.4302
```

Tem-se, pois, que $M_{saída} = 2.9719$ e $T_{saída}/T_o = 0.4302$, de modo que

$$T_{saída} = 0.4302 \times 1000 = 430.2 \text{ K}$$

Resta apenas determinar a velocidade de escoamento na saída do bocal,

$$V_{saída} = M_{saída} \sqrt{\gamma R T_{saída}} = 2.972 \times \sqrt{1.30 \times 461.91 \times 430.2} = \boxed{1510.6 \text{ m/s}}$$

■ Prob. 8

Seja R a resultante que atua no difusor. Podemos escrever o seguinte equilíbrio de forças:

$$R + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1$$
$$\therefore R = \dot{m}(V_2 - V_1) - (p_1 A_1 - p_2 A_2) \quad (\mathbf{I})$$

onde os subscritos 1 e 2 referem-se à entrada e saída do difusor, respectivamente. Utilizamos os dados fornecidos para calcular a densidade do ar na entrada do difusor,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0.35 \times 10^5}{287 \times 230} = 0.530 \text{ kg/m}^3$$

e em seguida a área de entrada A_1 ,

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 V_1} = \frac{25}{0.530 \times 200} = 0.236 \text{ m}^2$$

O número de Mach do escoamento na entrada é

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{200}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 230}} = 0.658 \approx 0.66$$

Consultando a tabela no apêndice, temos $p/p^* = 0.7465$ e $T/T^* = 0.9199$, portanto

$$p_1^* = \frac{0.35 \times 10^5}{0.7465} = 46,890 \text{ Pa} = 46.89 \text{ kPa}$$

$$T_{o1} = \frac{230}{0.9199} = 250.0 \text{ K}$$

Em seguida, sabendo que $M_2 = 0.2$, temos

$$\frac{p_2}{p_{o2}} = 0.9725 \quad ; \quad \frac{T_2}{T_{o2}} = 0.9921$$

Sendo $p_{o1} = p_{o2}$ para escoamento isentrópico,

$$\frac{p_2}{p_{o2}} = 0.9725 \quad \rightarrow \quad p_2 = 0.9725 p_{o2}$$

$$\therefore p_2 = 0.9725 p_{o1}$$

$$\therefore p_2 = 0.9725 \times (0.45 \times 10^5) = 43,763 \text{ Pa}$$

e, com $T_{o2} = T_{o1}$,

$$\frac{T_2}{T_{o2}} = 0.9921 \rightarrow T_2 = 0.9921T_{o2}$$

$$\therefore T_2 = 0.9725T_{o1}$$

$$\therefore T_2 = 0.9725 \times 250.0 = 243.1 \text{ K}$$

A velocidade V_2 na saída do difusor é

$$V_2 = M_2 a_2 = M_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 0.2 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 243.1} = 62.51 \text{ m/s}$$

Substituindo em **(I)**,

$$R = 25 \times (62.51 - 200) - (35,000 \times 0.236 - 43,763 \times 0.5) = 10,184 \text{ N}$$

$$\therefore \boxed{R = 10.18 \text{ kN}}$$

■ Prob. 9

Parte (a): Em um escoamento subsônico, a pressão de Pitot é igual à pressão de estagnação do escoamento. A diferença de pressões é obtida através da leitura do manômetro; sendo assim, escrevemos

$$p_o - p = \rho_m g \Delta H \quad \text{(I)}$$

onde $\rho_m \approx 13,580 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do mercúrio, $g \approx 9.81 \text{ m}^2/\text{s}$ e $\Delta H = 0.25 \text{ m}$.
Substituindo em **(I)**,

$$p_o - p = 13,580 \times 9.81 \times 0.25 = 33,305 \text{ kPa}$$

Manipulando o lado esquerdo da igualdade,

$$p_o - p = 33,305 \rightarrow \frac{p_o - p}{p} = \frac{33,305}{p}$$

$$\therefore \frac{p_o}{p} - 1 = \frac{33,305}{p}$$

$$\therefore \frac{p_o}{p} = \frac{33.31}{101} + 1$$

$$\therefore \frac{p_o}{p} = 1.330$$

Ignorando efeitos de compressibilidade, basta resolver a equação de Bernoulli para a velocidade V do ar,

$$\frac{\rho V^2}{2} = p_o - p \rightarrow V = \sqrt{\frac{2(p_o - p)}{\rho}}$$

onde

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{101,000}{287 \times 303} = 1.161 \text{ kg/m}^3$$

Portanto,

$$V = \sqrt{\frac{2 \times 33,305}{1.161}} = \boxed{239.5 \text{ m/s}}$$

Desprezando efeitos de compressibilidade, a velocidade do escoamento é 239.5 m/s.

Parte (b): Seguindo para o caso em que efeitos de compressibilidade são apreciáveis, entramos com a razão $p/p_o = 1/1.330 = 0.752$ na tabela ao final do documento. Interpolamos entre $(p/p_o = 0.7465, M = 0.66)$ e $(p/p_o = 0.7591, M = 0.64)$ para obter $M = 0.6513$. Sabendo que a temperatura do ar é 303 K, a velocidade medida será

$$V = Ma = M\sqrt{\gamma RT} = 0.6513 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 303} = \boxed{227.3 \text{ m/s}}$$

Isto é, a velocidade medida será de aprox. 227.3 m/s se levarmos em conta efeitos de compressibilidade.

■ Prob. 10

Em um escoamento subsônico, a pressão de Pitot é igual à pressão de estagnação do escoamento. Para ar escoando com Mach 0.7, podemos recorrer à tabela no apêndice e ler $p/p_o = 0.7209$ e $T/T_o = 0.9107$. Portanto, a pressão estática do escoamento é

$$\frac{p}{p_o} = 0.7209 \rightarrow p = 0.7209 p_o$$

$$\therefore p = 0.7209 \times 155 = \boxed{111.7 \text{ kPa}}$$

ao passo que a temperatura de estagnação é

$$\frac{T}{T_o} = 0.9107 \rightarrow T_o = \frac{T}{0.9107}$$

$$\therefore T_o = \frac{288}{0.9107} = \boxed{316.2 \text{ K}}$$

■ Prob. 11

Buscamos o tempo necessário para que a pressão na aeronave caia de 101 kPa para $0.4 \times 101 = 40.4$ kPa. No início do processo, a razão entre a pressão externa e a

pressão interna é $19.39/101 = 0.192$ ao passo que ao final do processo a razão é $19.39/40.4 = 0.48$. Sabemos que, a fim que haja estrangulamento, isto é, a fim que o número de Mach de descarga seja 1, é necessário que a razão entre a pressão de saída e a pressão do ar no interior da aeronave seja menor que ou igual a 0.528. Como essa igualdade é satisfeita a todo o momento, podemos considerar que o escoamento é estrangulado.

A conservação de energia exige que

$$\frac{d}{dt}(Mc_v T) = -\dot{m}c_p T$$

Uma vez que a temperatura do ar na cabine é suposta constante e que o escoamento é estrangulado no plano de descarga de modo que a temperatura do ar no plano de descarga é igual a 0.8333 vezes a temperatura do ar na cabine, podemos supor que a temperatura no plano de descarga também se mantém constante. Portanto, a equação fornecida acima pode ser escrita como

$$c_v T \frac{dM}{dt} = -\dot{m}c_p T \quad \text{(I)}$$

Considere primeiramente o lado esquerdo dessa expressão. Podemos reescrevê-lo como

$$c_v T \frac{dM}{dt} = c_v T \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{RT} V \right)$$

onde V é o volume da cabine, que é constante, assim como T . Reescrevemos a equação como

$$c_v T \frac{dM}{dt} = c_v \frac{V}{R} \frac{dp}{dt} = 0.718 \times \frac{860}{0.287} \frac{dp}{dt} = 2151.5 \frac{dp}{dt} \quad \text{(II)}$$

Feito isso, considere o lado direito da equação (I), que reescrevemos como

$$\dot{m}c_p T = \rho V A c_p T = \rho M a A c_p T = \left(\frac{p}{RT} \right) M \sqrt{\gamma RT} A c_p T$$

Sendo o escoamento estrangulado no plano de saída, tem-se $M = 1$ neste plano e a equação acima torna-se

$$\dot{m}c_p T = \left(\frac{p}{RT} \right) M \sqrt{\gamma RT} A c_p T = \left[\frac{0.528 p}{287 \times (0.833 \times 293)} \right] \times 1 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times (0.833 \times 293)} \times \left(\frac{\pi}{4} \times 0.12^2 \right) \times 1007 \times 293$$

$$\therefore \dot{m}c_p T = 7.877 p \quad \text{(III)}$$

onde p é a pressão na cabine. Podemos agora igualar (II) e (III),

$$2151.5 \frac{dp}{dt} = -7.877 p$$

Note que contribuições de **(II)** à energia do sistema têm sinal inverso relativamente a contribuições de **(III)** e vice-versa. Separando variáveis e integrando,

$$2151.5 \frac{dp}{dt} = -7.877 p \rightarrow -\frac{2151.5}{7.877} \frac{dp}{p} = dt$$

$$\therefore 273.1 \frac{dp}{p} = -dt$$

$$\therefore 273.1 \int_{p=p_1}^{p=p_2} \frac{dp}{p} = -\int_0^t dt$$

$$\therefore 273.1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -t$$

$$\therefore t = -273.1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Portanto, o tempo necessário para que a pressão caia de 101 kPa para 40.4 kPa é tal que

$$t = -273.1 \times \ln\left(\frac{40.4}{101}\right) = 250.2 \text{ sec} = \boxed{4.17 \text{ min}}$$

São necessários aproximadamente 4.2 minutos para que a pressão na cabine caia de 101 kPa para 40.4 kPa.

■ Prob. 12

Parte (a): Entrando com $M_1 = 2.0$ no webapp de choques normais, lê-se $A_1/A_1^* = 1.6875$ e $p_1/p_{o1} = 0.1278$. De modo semelhante, entramos com $M_2 = 0.25$ no mesmo webapp e lemos $A_2/A_2^* = 2.4027$ e $p_2/p_{o2} = 0.9575$. Segue que a razão de áreas A_2^*/A_1^* é dada por

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \left(\frac{A_2^*}{A_2}\right) \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \left(\frac{A_1}{A_1^*}\right) = \frac{1}{2.4027} \times 3.0 \times 1.6875 = 2.107$$

A razão de pressões estáticas, por seu turno, é

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_{o2}}\right) \left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right) \left(\frac{p_{o1}}{p_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_{o2}}\right) \left(\frac{A_2^*}{A_1^*}\right) \left(\frac{p_{o1}}{p_1}\right)$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_1} = 0.9575 \times \frac{1}{2.107} \times \frac{1}{0.1278} = \boxed{3.556}$$

Parte (b): No presente contexto, a razão de pressões de estagnação p_{o2}/p_{o1} equivale ao recíproco da razão de áreas de referência A_2^*/A_1^* ,

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \right) = \frac{1}{2.107} = \boxed{0.475}$$

■ Prob. 13

O número de Mach do escoamento a montante da onda é

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{2500}{\sqrt{(5/3) \times 2077 \times 300}} = 2.453$$

Entrando com esse número de Mach no webapp de escoamentos isentrópicos, tem-se $T_2/T_1 = 2.0914$ e $\rho_2/\rho_1 = 3.2770$. Ademais, podemos inserir M_1 no webapp de escoamentos isentrópicos e ler $T_1/T_{o1} = 0.4538$. A velocidade do He a jusante da onda é dada por

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = 3.2770 \rightarrow V_2 = \frac{V_1}{3.2770} \\ \therefore V_2 &= \frac{2500}{3.2770} = \boxed{762.8 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

A temperatura estática T_2 , por sua vez, é

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= 2.0914 \rightarrow T_2 = 2.0914 T_1 \\ \therefore T_2 &= 2.0914 \times 300 = \boxed{627.4 \text{ K}} \end{aligned}$$

Por fim, a temperatura de estagnação se conserva ao longo da onda e é tal que

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_{o1}} &= 0.4538 \rightarrow T_{o2} = T_{o1} = \frac{T_1}{0.4538} \\ \therefore T_{o2} &= \frac{300}{0.4538} = \boxed{661.1 \text{ K}} \end{aligned}$$

■ Prob. 14

Caso 1 – Choque na Entrada. Entrando com $M_i = 2.5$ na tabela do apêndice, podemos extrair

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = 0.4990 = \frac{A_1^*}{A_2^*}$$

Ademais,

$$\frac{p_1}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}}{p_{o1}} \times \frac{p_1}{p_{o2}} = 0.4990 \times 0.1173 = 0.05853$$

Inserindo $M_1 = 2.5$ na calculadora de escoamentos isentrópicos do *engineering.com*, temos $A_1/A_1^* = 2.6367$. Uma vez que o choque ocorre na entrada do difusor, tem-se que $A_e^* = A_2^*$ e, por conseguinte,

$$\frac{A_e}{A_e^*} = \frac{A_e}{A_2^*} = \left(\frac{A_e}{A_1}\right) \left(\frac{A_1}{A_1^*}\right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*}\right) = 3.0 \times 2.6367 \times 0.4990 = 3.9471$$

Entrando com esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se $M_e = 0.1486$ e $p_e/p_{o2} = 0.9847$. Temos ainda $p_{o2}/p_{o1} = 0.4990$ e $p_1/p_{o1} = 0.05853$, conforme calculado acima. Usando a última dessas frações, temos

$$p_{o1} = \frac{p_1}{0.05853} = \frac{10}{0.05853} = 170.9 \text{ kPa}$$

A pressão de estagnação na seção 2, por sua vez, é

$$p_{o2} = 0.4990 p_{o1} = 0.4999 \times 170.9 = 85.43 \text{ kPa}$$

Segue que a pressão estática p_e na saída do bocal é

$$p_e = \left(\frac{p_e}{p_{o2}}\right) p_{o2} = 0.9847 \times 85.43 = \boxed{84.12 \text{ kPa}}$$

Resta apenas calcular a queda de pressão de estagnação, $p_{oi} - p_{oe}$, qual seja,

$$p_{oi} - p_{oe} = p_{o1} \left(1 - \frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right) = 170.9 \times (1 - 0.4990) = 85.62 \text{ kPa}$$

Caso 2 – Choque na Saída. Nesse caso, lembrando que o número de Mach na entrada do difusor continua sendo 2.5, temos $A_1/A_i = 3.0$, $A_i/A_1^* = 2.6367$ e $A_1/A_1^* = 3.0 \times 2.6367 = 7.9101$. Entrando com A_1/A_1^* no webapp de escoamentos isentrópicos, obtemos $M_1 = 3.6649$. Em seguida, entrando com esse número de Mach no webapp de choques normais, lê-se $M_2 = 0.4451$. O webapp de escoamentos isentrópicos fornece também $p_{o2}/p_{o1} = 0.1847$ e $p_1/p_{o2} = 0.05630$, de modo que $p_1/p_{o1} = 0.1847 \times 0.05630 = 0.01034$. O webapp de choques normais fornece $p_2/p_1 = 15.5034$. Prosseguimos então ao cálculo da pressão a jusante do choque normal,

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{p_1}{p_{o1}}\right) \left(\frac{p_{o1}}{p_i}\right) p_i = 15.5034 \times 0.01034 \times \frac{1}{0.05853} \times 10 = \boxed{27.39 \text{ kPa}}$$

Por fim, a queda de pressão de estagnação, $p_{oi} - p_{oe}$ é

$$p_{oi} - p_{oe} = p_{o1} \left(1 - \frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right) = 170.9 \times (1 - 0.1847) = \boxed{139.3 \text{ kPa}}$$

■ Prob. 15

Inserimos o número de Mach na entrada do difusor, $M_e = 2.8$, no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e extraímos as razões $A/A_1^* = 3.5001$, $p_i/p_{o1} = 0.0368$, e $T_i/T_{o1} = 0.3894$. Calculamos a razão de áreas na seção 1, localizada logo a montante do choque normal,

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \left(\frac{A_t}{A_i} \right) \left(\frac{A_i}{A_1^*} \right) = \frac{0.10}{0.25} \times 3.5001 = 1.40$$

Inserimos essa razão de áreas no webapp de escoamentos compressíveis e obtemos o número de Mach $M_1 = 1.7632$. Entrando com esse parâmetro no webapp de choques normais, tem-se a razão de pressões de estagnação $p_{o2}/p_{o1} = 0.8289$. Note que a razão de áreas A_1^*/A_2^* é tal que

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = 0.8289$$

Seguindo para a região entre a seção 2 (isto é, a seção logo a jusante do choque) e a saída, escrevemos

$$\frac{A_e}{A_2^*} = \left(\frac{A_e}{A_i} \right) \left(\frac{A_i}{A_1^*} \right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \right) = \frac{0.5}{0.25} \times 3.5001 \times 0.8289 = 5.8024$$

Entrando com essa razão no webapp de escoamentos isentrópicos, obtemos $M_e = 0.1003$, $p_e/p_{o2} = 0.9930$ e $T_e/T_o = 0.9980$. Calculamos também as propriedades de estagnação T_o e p_{oi} , quais sejam,

$$T_o = \frac{293}{0.3894} = 752.4 \text{ K}$$
$$p_{oi} = \frac{100}{0.0368} = 2717.4 \text{ kPa}$$

A pressão de estagnação na saída é

$$p_{oe} = 0.8289 \times 2717.4 = \boxed{2252.5 \text{ kPa}}$$

A pressão estática na saída é

$$p_e = 0.9930 \times 2252.5 = \boxed{2236.7 \text{ kPa}}$$

Por fim, determinamos a velocidade na saída do difusor,

$$V_e = M_e \sqrt{\gamma R T_e} = 0.1003 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times (0.9980 \times 752.4)} = \boxed{55.09 \text{ m/s}}$$

■ Prob. 16

Notando que $M_i = 3.0$ na entrada do canal, recorreremos à calculadora de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e obtemos $A_i/A_i^* = 4.2346$. (Temos também $p_i/p_{oi} = 0.02722$, que será útil logo abaixo.) Analogamente, notamos que $M_e = 0.4$ na saída do difusor e extraímos $A_e/A_e^* = 1.5901$. (Tem-se também $p_e/p_{oe} = 0.8956$, que utilizaremos abaixo.) Além disso, a ilustração indica que $A_e = 2A_i$, isto é, a área da saída do canal é o dobro da área da entrada. Usando essas informações, determinamos a razão de áreas de referência

$$\frac{A_i^*}{A_e^*} = \left(\frac{A_i^*}{A_i} \right) \left(\frac{A_i}{A_e} \right) \left(\frac{A_e}{A_e^*} \right) = \frac{1}{4.2346} \times \frac{1}{2} \times 1.5901 = 0.1878$$

Mas

$$\frac{A_i^*}{A_e^*} = \frac{p_{oe}}{p_{oi}} = \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Portanto,

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = 0.1878$$

Em seguida, entramos com essa razão de pressões de estagnação no webapp de choques normais e extraímos o número de Mach $M_1 = 3.6456$. Depois, inserimos esse número de Mach no mesmo webapp e lemos a razão de pressões $p_2/p_1 = 15.3388$. Por fim, calculamos a razão de pressões estáticas nas extremidades do difusor,

$$\frac{p_e}{p_i} = \left(\frac{p_e}{p_{oe}} \right) \left(\frac{p_{oe}}{p_{oi}} \right) \left(\frac{p_{oi}}{p_i} \right) = 0.8956 \times 0.1878 \times \frac{1}{0.02722} = \boxed{6.179}$$

■ Prob. 17

Temos a razão de áreas $A_e/A^* = 3.0$. Como o leitor deve saber, na teoria de escoamentos isentrópicos ocorrem duas soluções para uma mesma razão de áreas, uma subsônica e a outra supersônica. Isso não é problema para o webapp do *engineering.com*; basta escolher o tipo de solução desejada no campo *INPUT*. No presente caso, a solução subsônica é $M_e = 0.1974$, $p_e/p_o = 0.9731$ ao passo que a solução supersônica é $M_e = 2.6374$, $p_e/p_o = 0.0473$. No caso da solução supersônica, temos também $p_2/p_1 = 7.9485$. Para que tenhamos um choque imediatamente a jusante da garganta, a pressão p_r no reservatório deverá ser tal que

For a perfect gas, $\gamma = 1.4$

INPUT:	A/A* (sub)	=	
	Mach number		
M =	0.1974483	T/T0	
p/p0 =	0.9731819	p/p0	
p/p* =	1.8421644	rho/rho0	
	A/A* (sub)		0.9
	A/A* (sup)		1.5
	Mach angle (deg.)		
	P-M angle (deg.)		

$$p_r = p_o = \frac{101}{0.9732} = 103.78 \text{ kPa}$$

Ou, para que haja um choque na saída do bocal,

$$p_r = p_o = \frac{101}{0.0473 \times 7.9486} = 268.64 \text{ kPa}$$

Assim sendo, ocorrerá um choque no bocal se $103.78 \text{ kPa} \leq p_r \leq 268.64 \text{ kPa}$. Segue que a menor pressão no reservatório necessária para produzir um escoamento sônico na garganta do bocal é $\sim 103.78 \text{ kPa}$. Por fim, a pressão no reservatório requerida para obtermos uma expansão isentrópica perfeita é $p_r = 101/0.0473 = 2135.3 \text{ kPa} \approx 2.135 \text{ MPa}$.

■ Prob. 18

Para $A_s/A^* = 2.2$ (onde o subscrito 's' refere-se à seção de interesse), recorremos ao webapp de escoamentos isentrópicos e obtemos $M_s = M_1 = 2.3034$. Entrando com esse número no webapp de choques normais, tem-se

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{A_1^*}{A_2^*} = 0.5818$$

Em seguida, a razão de áreas A_e/A_2^* é dada por

$$\frac{A_e}{A_2^*} = \left(\frac{A_e}{A_t} \right) \left(\frac{A_t}{A_1^*} \right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \right) = 3.0 \times 1 \times 0.5818 = 1.7454$$

Entrando com essa razão no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se $M_e = 0.3577$ e $p_e/p_{o2} = 0.9154$. Portanto, denotando como p_r a pressão do reservatório que alimenta o bocal,

$$\frac{p_e}{p_r} = \frac{p_e}{p_{o1}} = \left(\frac{p_e}{p_{o2}} \right) \left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right) = 0.9154 \times 0.5818 = 0.5326 \quad \text{(I)}$$

Essa relação sugere, em termos relativos, a intensidade da contrapressão que sustenta o escoamento. Busca-se a contrapressão necessária para extinguir o choque que ocorre no bocal em foco. Para tanto, consideramos o caso extremo: o choque ocorre na saída do bocal. Nesse caso, $A_s = A_e$ e $A_s/A^* = A_e/A_t^* = 3.0$. Entrando com esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos, extraímos $M_1 = 2.6374$ e $p_1/p_{o1} = 0.0473$. Em seguida, entrando com $M_1 = 2.6374$ no webapp de choques normais, lemos $p_2/p_1 = 7.9485$. A razão p_e/p_r atualizada é então

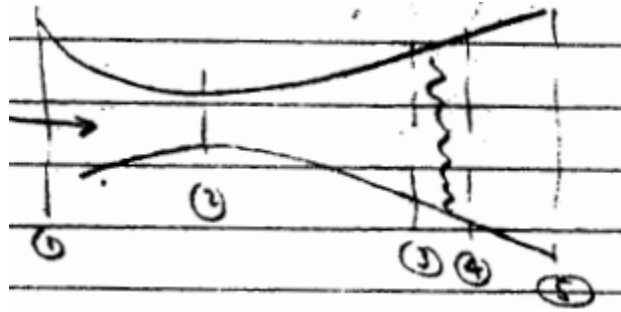
$$\frac{p_e}{p_r} = \frac{p_e}{p_{o1}} = \left(\frac{p_1}{p_{o1}} \right) \left(\frac{p_e}{p_2} \right) \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 0.0473 \times 1 \times 7.9485 = 0.3759 \quad \text{(II)}$$

Combinando (I) e (II) concluímos que, para extinguir o choque, a contrapressão deve ser reduzida em um percentual P tal que

$$P(\%) = \frac{0.5326 - 0.3759}{0.5326} \times 100\% = \boxed{29.42\%}$$

■ Prob. 19

Parte (a): O bocal e suas respectivas seções estão ilustrados a seguir.



Lembrando que a razão de pressões e temperaturas para Mach 1.0 são respectivamente iguais a 0.5283 e 0.8333, temos, na garganta do bocal (seção 2),

$$p_2 = 0.5283 \times 100 = 52.83 \text{ psia}$$

$$T_2 = 0.8333 \times 600 = 500.0^\circ \text{ R}$$

Lembrando que $R = 53.3 \text{ ft}\cdot\text{lb}/\text{lbm}\cdot^\circ\text{R}$ e $1 \text{ ft}^2 = 144 \text{ in.}^2$, utilizamos a equação dos gases ideais para computar a densidade do ar na seção 2,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{52.83 \times 144}{53.3 \times 500} = 0.285 \text{ lbm}/\text{ft}^3$$

Em seguida, a velocidade sônica a_2 na garganta é dada por

$$V_2 = a_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = \sqrt{1.4 \times (32.2 \times 53.3) \times 500} = 1096.1 \text{ ft}/\text{sec}$$

A área da garganta A_2 é

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 V_2} = \frac{10}{0.285 \times 1096.1} = 0.0320 \text{ ft}^2 = \boxed{4.61 \text{ in.}^2}$$

Parte (b): Como mostra o desenho fornecido na parte (a), designamos como '3' a seção imediatamente a montante do choque. A razão de pressões p_3/p_{o3} é dada por

$$\frac{p_3}{p_{o3}} = \left(\frac{p_3}{p_{o1}} \right) \left(\frac{p_{o1}}{p_{o3}} \right) = \frac{28}{100} \times 1.0 = 0.28$$

Entramos com esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos $M_3 = 1.4810$ e $A_3/A_3^* = A_3/A_2 = 1.1635$. Podemos prosseguir e calcular a área A_3 da seção onde ocorre o choque,

$$A_3 = \left(\frac{A_3}{A_3^*}\right)\left(\frac{A_3^*}{A_2^*}\right)A_2^* = 1.1635 \times 1.0 \times 4.61 = \boxed{5.36 \text{ in.}^2}$$

Parte (c).1: Entrando com $M_5 = 0.5$ no webapp de escoamentos isentrópicos, temos

$$\frac{p_5 A_5}{p_{05} A_5^*} = 0.843 \times 1.3398 = 1.1295$$

Podemos reescrever esse produto de frações da seguinte forma,

$$\frac{p_5 A_5}{p_{05} A_5^*} = \frac{p_5 A_5}{p_{01} A_2} \quad \text{(I)}$$

Retornamos a **(I)** após a resolução da parte (e).

Parte (d): Entrando com $M_3 = 1.4810$ no webapp de choques normais, lê-se $M_4 = 0.7079$. Inserindo M_3 no webapp de escoamentos isentrópicos, tem-se $A_4/A_4^* = 1.0888$. Entrando com $M_5 = 0.5$ (onde '5' é a estação da saída do bocal), lemos $A_5/A_5^* = 1.3398$. Segue que a razão de áreas A_5/A_4 é

$$\frac{A_5}{A_4} = \left(\frac{A_5}{A_5^*}\right)\left(\frac{A_5^*}{A_4^*}\right)\left(\frac{A_4^*}{A_4}\right) = 1.3398 \times 1.0 \times \frac{1}{1.0888} = 1.2305$$

e a área A_5 propriamente dita é

$$A_5 = \left(\frac{A_5}{A_4}\right)A_4 = \left(\frac{A_5}{A_4}\right)A_3 = 1.2305 \times 5.36 = \boxed{6.60 \text{ in.}^2}$$

Parte (e): A razão de áreas A_5/A_5^* é dada por

$$\frac{A_5}{A_5^*} = \frac{A_5}{A_2} = \frac{6.60}{4.61} = 1.432$$

Entrando com esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se o número de Mach de dimensionamento = $1.7935 \approx \mathbf{1.79}$.

Parte (c).2: Reconsiderando a equação **(I)**, temos o produto de frações no lado esquerdo, que foi determinado na parte (c).1, e a razão A_5/A_2 , que foi obtida na parte (e). Substituímos tais grandezas na referida equação e obtemos

$$\frac{p_5 A_5}{\underbrace{p_{o5} A_5^*}_{=1.1295}} = \frac{p_5}{p_{o1}} \frac{A_5}{\underbrace{A_2}_{=1.432}} \quad \rightarrow \quad 1.1295 = \frac{p_5}{p_{o1}} \times 1.432$$

$$\therefore \frac{p_5}{p_{o1}} = \frac{1.1295}{1.432} = 0.7888 \approx \boxed{0.79}$$

Portanto, a pressão estática na saída deve ser igual a aproximadamente 0.79 vezes a pressão de estagnação do gás na entrada do bocal.

■ Prob. 20

Dividimos a análise em dois casos, quais sejam, (1) *com o choque normal na entrada e* (2) *com o choque normal na saída*.

Caso 1: Choque na entrada do difusor. Sendo '1' a seção a montante do choque, temos aqui 'i' = '1' (ou seja, o choque ocorre na entrada do difusor). Para $M_1 = 1.92$, recorreremos ao webapp de escoamentos isentrópicos e lemos $p_1/p_{o1} = 0.1447$, $A_1^*/A_2^* = 0.7581$ e $A_1/A_1^* = 1.5804$. Segue que

$$\frac{A_e}{A_2^*} = \left(\frac{A_e}{A_1} \right) \left(\frac{A_1}{A_1^*} \right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \right) = \frac{200}{100} \times 1.5804 \times 0.7581 = 2.3962$$

Entrando com esse valor no próprio app de escoamentos isentrópicos, extraímos $M_e = 0.2507$ e $p_e/p_{o2} = 0.9572$. A contrapressão p_b dada por

$$p_e = p_b = \left(\frac{p_e}{p_{o2}} \right) \left(\frac{p_{o1}}{p_1} \right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \right) p_1 = 0.9572 \times \frac{1}{0.1447} \times 0.7581 \times 70 = 351.0 \text{ kPa}$$

Caso 2: Choque na saída do difusor. Sendo '2' a seção a jusante do choque, temos aqui 'e' = '2' (ou seja, o choque ocorre na saída do difusor). Com $A_i/A_1^* = 1.5804$, temos

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \left(\frac{A_1}{A_i} \right) \left(\frac{A_i}{A_1^*} \right) = \frac{200}{100} \times 1.5804 = 3.1608$$

Inserindo essa razão de áreas no webapp de escoamentos isentrópicos, tem-se $M_1 = 2.6926$, $p_2/p_1 = 8.2918$ e $p_1/p_{o1} = 0.0434$. Sendo isentrópico o escoamento entre 'i' e '1', podemos escrever

$$p_1 = \left(\frac{p_1}{p_{o1}} \right) \left(\frac{p_{oi}}{p_i} \right) p_i = 0.0434 \times \frac{1}{0.1447} \times 70 = 21.0 \text{ kPa}$$

Segue que a contrapressão p_b é dada por

$$p_b = p_e = p_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) p_1 = 8.2918 \times 21.0 = 174.1 \text{ kPa}$$

Concluimos que haverá um choque normal no difusor se $174.1 \text{ kPa} \leq p_b \leq 351.0 \text{ kPa}$.
Resta apenas calcular a vazão mássica \dot{m} ,

$$\dot{m} = \rho_i A_i V_i = \frac{p_i}{RT_i} \times A_i \times M_i \sqrt{\gamma RT_i}$$

$$\therefore \dot{m} = \frac{70,000}{287 \times 270} \times (100 \times 10^{-4}) \times 1.92 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 270} = \boxed{5.71 \text{ kg/s}}$$

■ Prob. 21

Temos $p_2/p_1 = 3$, $p_1 = 101.3 \text{ kPa}$ e $T_1 = 298 \text{ K}$. Inserimos a razão de pressão no webapp de choques normais e extraímos $M_1 = 1.648$, $M_2 = 0.655$ e $T_2/T_1 = 1.421$. Considerando os deslocamentos relativos mostrados nas figura (a) e (b) acima, escrevemos

$$M_1 = \frac{U_s}{a_1} \quad ; \quad M_2 = \frac{U_s - V}{a_2} \quad \text{(I), (II)}$$

A velocidade do som a_1 é dada por

$$a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 298} = 346.0 \text{ m/s}$$

Logo, substituindo em (I),

$$M_1 = \frac{U_s}{a_1} \quad \rightarrow \quad U_s = M_1 a_1$$

$$\therefore U_s = 1.648 \times 346.0 = 570.2 \text{ m/s}$$

Resolvendo (II) para a velocidade V a jusante da onda,

$$M_2 = \frac{U_s - V}{a_2} \quad \rightarrow \quad M_2 a_2 = U_s - V$$

$$\therefore V = U_s - M_2 a_2$$

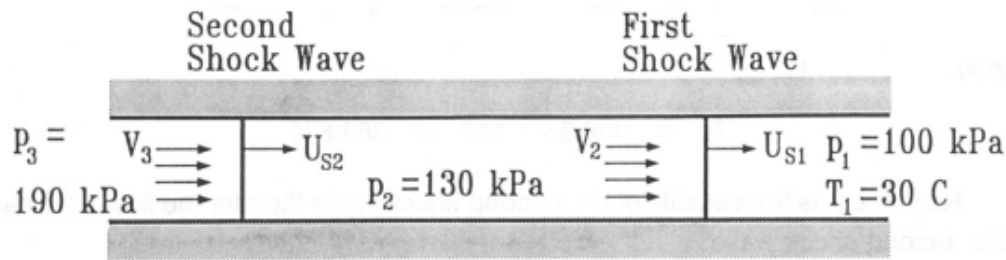
$$\therefore V = M_1 a_1 - M_2 a_2$$

$$\therefore V = \left[M_1 - M_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \right] a_1$$

$$\therefore V = \left[1.648 - 0.655 \times \sqrt{1.421} \right] \times 346.0 = \boxed{300.1 \text{ m/s}}$$

■ Prob. 22

O sistema em questão é ilustrado em maior detalhe a seguir.



Considere o escoamento relativo à primeira onda quando esta ainda está se propagando em ar estático. Nesse período, tem-se, para a primeira onda, $p_2/p_1 = 130/100 = 1.3$, $p_1 = 100$ kPa e $T_1 = 30^\circ\text{C} = 303$ K. Entrando com a razão de pressões p_2/p_1 no webapp de choques normais, tem-se $M_1 = 1.121$, $M_2 = 0.896$ e $T_2/T_1 = 1.078$. A temperatura T_2 a montante da primeira onda é então

$$T_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right) T_1 = 1.078 \times 303 = 326.6 \text{ K}$$

Os Machs nas regiões 1 e 2 são respectivamente dados por

$$M_1 = \frac{U_{s1}}{a_1} \quad ; \quad M_2 = \frac{U_{s1} - V_2}{a_2} \quad \text{(I), (II)}$$

Tem-se

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 303} = 348.9 \text{ m/s}$$

$$a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 326.5} = 362.2 \text{ m/s}$$

de modo que, resolvendo **(I)** para U_{s1} ,

$$U_{s1} = M_1 a_1 = 1.121 \times 348.9 = 391.1 \text{ m/s}$$

e em seguida resolvendo **(II)** para U_{s2} ,

$$M_2 = \frac{U_{s1} - V_2}{a_2} \quad \rightarrow \quad V_2 = U_{s1} - M_2 a_2$$

$$\therefore V_2 = M_1 a_1 - M_2 a_2$$

$$\therefore V_2 = 1.121 \times 348.9 - 0.896 \times 362.2 = 66.59 \text{ m/s}$$

Considere agora a segunda onda. A razão de pressões através desse choque é $p_3/p_2 = 190/130 = 1.462$; entramos com esse valor no webapp de choques normais e lemos os valores $M_2 = 1.182$, $M_3 = 0.854$ e $T_3/T_2 = 1.116$. Segue que

$$T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \right) T_2 = 1.117 \times 326.6 = \boxed{364.8 \text{ K}}$$

Sendo U_{s2} a velocidade da segunda onda de choque, podemos escrever

$$M_2 = \frac{U_{s2} - V_2}{a_2} \quad ; \quad M_3 = \frac{U_{s2} - V_3}{a_3} \quad \text{(III), (IV)}$$

Resolvendo **(III)** para U_{s2} , temos

$$M_2 = \frac{U_{s2} - V_2}{a_2} \quad \rightarrow \quad U_{s2} = M_2 a_2 + V_2$$

$$\therefore U_{s2} = 1.182 \times 362.2 + 66.59 = 494.7 \text{ m/s}$$

Ademais, sendo

$$a_3 = \sqrt{\gamma R T_3} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 364.8} = 382.9 \text{ m/s}$$

Resolvemos **(IV)** para V_3 e obtemos

$$M_3 = \frac{U_{s2} - V_3}{a_3} \quad \rightarrow \quad V_3 = U_{s2} - M_3 a_3$$

$$\therefore V_3 = 494.7 - 0.854 \times 382.9 = \boxed{167.7 \text{ m/s}}$$

Concluimos, pois, que a temperatura e velocidade atrás da segunda onda são respectivamente iguais a 368.4 K e 167.7 m/s. Busca-se também determinar a distância entre as duas ondas 0.7 segundos após o surgimento da primeira onda, ou, equivalentemente, 0.2 segundos após o surgimento da segunda onda. A distância s em questão é dada por

$$s = U_{s1} \times 0.7 - U_{s2} \times 0.2 = 391.1 \times 0.7 - 494.7 \times 0.2 = \boxed{174.8 \text{ m}}$$

■ Prob. 23

Considere o escoamento relativo à onda de choque. Sabendo que a onda deve fazer com que o ar venha ao repouso, podemos escrever, sendo U_s a velocidade de propagação do choque,

$$M_1 = \frac{U_s + V}{a_1} \quad ; \quad M_2 = \frac{U_s}{a_2}$$

De modo que a primeira equação, por seu lado, torna-se

$$M_1 = \frac{U_s + V}{a_1} = \frac{U_s}{a_1} + \frac{V}{a_1}$$

$$\therefore M_1 = \frac{a_2}{a_1} \underbrace{\left(\frac{U_s}{a_2} \right)}_{=M_2} + \frac{V}{a_1}$$

$$\therefore M_1 = M_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) + \frac{V}{a_1}$$

Mas a velocidade do som adiante da onda é

$$a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 298} = 346.0 \text{ m/s}$$

e, com $V = 250 \text{ m/s}$,

$$M_1 = M_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) + \frac{250}{346} = M_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) + 0.7225$$

Recorremos ao webapp de choques normais para inserir valores arbitrários de M_1 e obter valores de M_2 e a_2/a_1 que podem ser substituídos no lado direito da equação acima. Repete-se o processo até que os dois lados da equação estejam razoavelmente próximos. O procedimento em questão é tabelado a seguir.

M_1 (valor suposto)	M_2 (webapp choques normais)	a_2/a_1 (webapp choques normais)	$M_2(a_2/a_1) +$ 0.7225 (calculado)
1.000	1.000	1.000	1.722
1.400	0.740	1.120	1.551
1.500	0.701	1.149	1.528
1.600	0.668	1.178	1.509
1.550	0.684	1.164	1.518
1.540	0.687	1.161	1.520
1.520	0.694	1.155	1.522

A partir desses resultados, concluímos que a equação é satisfeita quando $M_1 \approx 1.522$. Para um Mach a montante com esse valor, podemos recorrer ainda uma vez ao webapp de choques normais e ler $p_2/p_1 = 2.5359$. Portanto, a pressão que buscamos é dada por

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) p_1 = 2.5359 \times 105 = \boxed{266.3 \text{ kPa}}$$

Ou seja, a pressão que atua na válvula é de aproximadamente 266 kPa.

■ Prob. 24

O primeiro passo é encontrar o ângulo de choque. Para tanto, substituímos $M = 3$ e $\delta = 18^\circ$ no webapp de choques oblíquos do *engineering.com* e extraímos $\theta = 35.47^\circ$. Segue que o número de Mach normal a montante do choque é

$$M_{n1} = M_1 \sin \theta = 3 \times \sin(35.47^\circ) = 1.7408$$

Em seguida, recorreremos ao webapp de choques normais e lemos o Mach normal a jusante $M_{n2} = 0.6303$, a razão de pressões estáticas $p_2/p_1 = 3.3688$, a razão de temperaturas estáticas $T_2/T_1 = 1.4879$ e a razão de pressões de estagnação $p_{o2}/p_{o1} = 0.8385$. O número de Mach a jusante do choque é

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\theta - \delta)} = \frac{0.6303}{\sin(35.47^\circ - 18^\circ)} = 2.0996$$

Recorrendo ao webapp de escoamentos isentrópicos, inserimos $M_1 = 3.0$ e obtemos $T/T_o = 0.3571$. Lembrando que a temperatura de estagnação é constante ao longo do escoamento, tem-se

$$T_{o2} = T_{o1} = \frac{293}{0.3571} = 820.5 \text{ K}$$

Quanto à temperatura estática, temos

$$T_2 = 1.4879 \times T_1 = 1.4879 \times 293 = 436.0 \text{ K}$$

As velocidades do som a montante e a jusante do choque são

$$a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 293} = 343.1 \text{ m/s}$$

$$a_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 436.0} = 418.6 \text{ m/s}$$

E as componentes de velocidade normais são dadas por

$$V_{n1} = M_{n1} a_1 = 1.7408 \times 343.1 = 597.3 \text{ m/s}$$

$$V_{n2} = M_{n2}a_2 = 0.6303 \times 418.6 = 263.8 \text{ m/s}$$

Temos ainda

$$V_1 = M_1a_1 = 3.0 \times 343.1 = 1029.3 \text{ m/s}$$

$$V_2 = M_2a_2 = 2.0996 \times 418.6 = 878.9 \text{ m/s}$$

As componentes tangenciais de velocidade são

$$V_{t1} = V_1 \cos \theta = 1029.3 \times \cos(35.47^\circ) = 838.2 \text{ m/s}$$

$$V_{t2} = V_2 \cos(\theta - \delta) = 878.9 \times \cos(35.47^\circ - 18^\circ) = 838.4 \text{ m/s}$$

e os Machs tangenciais são

$$M_{t1} = \frac{V_{t1}}{a_1} = \frac{838.2}{343.1} = 2.44$$

$$M_{t2} = \frac{V_{t2}}{a_2} = \frac{838.4}{418.6} = 2.00$$

Por fim, podemos recorrer à Tabela 6.4 de John e Keith (2006) e, sabendo que $\gamma = 1.4$ e $M_1 = 3.0$, depreendemos que a inclinação máxima para que o choque não seja desacoplado é $\delta_{\max} = 34.07^\circ$.

TABLE 6.4 Maximum Deflection and Shock Angles for Various γ and M_1 Values

γ	M_1	θ_{\max} (deg)	δ_{\max} (deg)	γ	M_1	θ_{\max} (deg)	δ_{\max} (deg)	γ	M_1	θ_{\max} (deg)	δ_{\max} (deg)
1.3	1.0	90	0	1.4	1.0	90	0	1.667	1.0	90	0
	1.5	66.86	12.89		1.5	66.59	12.11		1.5	66.01	10.43
	2.0	65.34	24.73		2.0	64.67	22.97		2.0	63.27	19.34
	2.5	65.82	32.28		2.5	64.78	29.8		2.5	62.69	24.79
	3.0	66.56	37.07		3.0	65.24	34.07		3.0	62.64	28.14
	3.5	67.21	40.22		3.5	65.69	36.87		3.5	62.71	30.3
	4.0	67.74	42.39		4.0	66.06	38.77		4.0	62.81	31.76
	4.5	68.15	43.94		4.5	66.35	40.13		4.5	62.9	32.79
	5.0	68.48	45.08		5.0	66.58	41.12		5.0	62.97	33.54
	10	69.68	48.93		10	67.45	44.43		10	63.3	36.02

■ Prob. 25

Parte (a): Primeiramente, calculamos a razão de áreas entre saída e garganta,

$$\frac{A_{\text{saída}}}{A_{\text{garg}}} = \frac{A_e}{A^*} = \frac{180}{60} = 3.0$$

Para essa razão de áreas, utilizamos o webapp de escoamentos isentrópicos e vemos que o número de Mach no plano de saída é $M_e = M_1 = 2.6374$. Entrando com esse valor e $\theta = 30^\circ$ no webapp de choques oblíquos, extraímos $\delta = 9.5496^\circ$ e $p_2/p_1 = 1.8621$. Segue que $p_1 = 101/1.8621 = 54.24$ kPa. Em seguida, inserimos $M_1 = 2.6374$ no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos $p_2/p_1 = 0.04730$. A pressão de estagnação desejada, p_{o1} , é

$$\frac{p_1}{p_{o1}} = 0.04730 \rightarrow p_{o1} = \frac{p_1}{0.04730}$$
$$\therefore p_{o1} = \frac{54.24}{0.0473} = \boxed{1146.7 \text{ kPa}}$$

Parte (b): Inserimos $M_1 = 2.6374$ no webapp de escoamentos isentrópicos novamente e dessa vez lemos a razão de temperaturas $T_e/T_o = 0.4182$. Portanto,

$$T_e = \left(\frac{T_e}{T_o} \right) T_o = 0.4182 \times 520 = 217.5 \text{ K}$$

A velocidade do som no plano de saída do bocal é

$$a_e = \sqrt{\gamma R T_e} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 217.5} = 295.6 \text{ m/s}$$

Por fim, a velocidade na saída do bocal é

$$V_e = M_e a_e = 2.6374 \times 295.6 = \boxed{779.6 \text{ m/s}}$$

Parte (c): A vazão mássica \dot{m} no bocal pode ser obtida a partir das propriedades na garganta,

$$\dot{m} = (\rho A V)_{\text{garg}} \quad \text{(I)}$$

onde

$$\rho_{\text{garg}} = \frac{p_t}{R T_t} = \frac{(p_t/p_{o1}) p_{o1}}{R (T_t/T_o) T_o} = \frac{0.5283 \times 1146.7}{0.287 \times 0.8333 \times 520} = 4.87 \text{ kg/m}^3$$

Ademais, $A = 50 \text{ cm}^2$, $M_t = 1.0$ e V_{garg} é tal que

$$V_{\text{garg}} = M_{\text{garg}} a_{\text{garg}} = M_{\text{garg}} \sqrt{\gamma R T_{\text{garg}}}$$

$$\therefore V_{\text{garg}} = 1.0 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times (0.8333 \times 520)} = 417.3 \text{ m/s}$$

Substituindo em **(I)**,

$$\dot{m} = (\rho A V)_{\text{garg}} = \rho_{\text{garg}} A_{\text{garg}} V_{\text{garg}}$$

$$\therefore \dot{m} = 4.87 \times (60 \times 10^{-4}) \times 417.3 = \boxed{12.19 \text{ kg/s}}$$

■ Prob. 26

Temos $M_1 = 2$ e $\theta = 40^\circ$; o número de Mach normal é $M_{1n} = 2 \times \sin(40^\circ) = 1.286$.

Recorrendo ao webapp de choques normais, extraímos $p_2/p_1 = 1.7628$, $T_2/T_1 = 1.1820$ e $M_{2n} = 0.7932$. O primeiro desses resultados fornece-nos a pressão estática p_2 ,

$$\frac{p_2}{p_1} = 1.7628 \rightarrow p_2 = 1.7628 p_1$$

$$\therefore p_2 = 1.7628 \times (0.5 \times 10^5) = 88,140 \text{ Pa} = \boxed{88.14 \text{ kPa}}$$

Da mesma forma, podemos determinar a temperatura estática T_2 ,

$$\frac{T_2}{T_1} = 1.1820 \rightarrow T_2 = 1.1820 T_1$$

$$\therefore T_2 = 1.1820 \times 273 = \boxed{322.7 \text{ K}}$$

Para um sistema adiabático, há a conservação da temperatura de estagnação, ou seja, $T_{o1} = T_{o2}$. Entrando com Mach 2 no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se $T_1/T_{o1} = 0.5556$, logo

$$T_{o1} = T_{o2} = \frac{273}{0.5556} = 491.4 \text{ K}$$

ou ainda

$$\frac{T_2}{T_{o2}} = \frac{322.7}{491.4} = 0.6567$$

Recorrendo ao webapp de escoamentos isentrópicos, vê-se que essa razão de temperaturas corresponde a $M_2 = 1.6167$. Podemos prosseguir ao cálculo do ângulo 2δ da cunha,

$$\sin(\theta - \delta) = \frac{u_2}{w_2} = \frac{0.7911}{1.6167} = 0.4893$$

$$\therefore \theta - \delta = \arcsin(0.4893)$$

$$\therefore 40^\circ - \delta = 29.29^\circ$$

$$\therefore \delta = 10.71^\circ$$

O ângulo da cunha é

$$\Delta = 2\delta = 2 \times 10.71^\circ = \boxed{21.42^\circ}$$

★ Concluimos que os itens **1** e **3** são **verdadeiros** e os itens **2** e **4** são **falsos**.

■ Prob. 27

Temos $M_1 = 3.5$ e $\theta = 45^\circ$. Entrando com esses valores no webapp de choques oblíquos do *engineering.com*, extrai-se o ângulo de viragem $\delta = 28.16^\circ$. O número de Mach normal a montante do declive é $M_{1n} = M_1 \times \sin \theta = 3.5 \times \sin(45^\circ) = 2.4749$. Entramos com esse valor no webapp de choques normais e lemos o número de Mach normal a jusante $M_{2n} = 0.5154$. Por fim, o número de Mach M_2 propriamente dito é dado por

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\theta - \delta)} = \frac{0.5154}{\sin(45^\circ - 28.16^\circ)} = \boxed{1.78}$$

■ Prob. 28

Sendo o número de Mach a montante do choque $M_1 = 2.7$, entramos com esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos $p_1/p_o = 0.0430$. Segue que a pressão de estagnação no escoamento a montante do choque é

$$p_1 = \left(\frac{p_o}{p_1} \right) p_1 = \frac{1}{0.0430} \times 100 = 2326 \text{ kPa}$$

Proseguimos para determinar as propriedades concernentes ao choque. O número de Mach a montante do choque é $M_1 = 2.7$ e o ângulo de onda é $\theta = 26^\circ$. Entrando com esses valores no webapp de choques oblíquos, lê-se $M_2 = 2.4486$ e o ângulo de viragem $\delta = 5.624^\circ$. Tem-se ainda $p_2/p_1 = 1.4677$, $T_2/T_1 = 1.1177$ e $p_{o2}/p_{o1} = 0.9943$. Considere agora o choque refletido mencionado no enunciado do problema. Este deverá girar em 5.624° e o escoamento na frente da onda terá número de Mach 2.4486 . Inserimos esses valores no webapp de escoamentos oblíquos e lemos $M_3 = 2.2186$, $p_3/p_2 = 1.4261$, $T_3/T_2 = 1.1082$ e $p_{o3}/p_{o2} = 0.9955$. A pressão estática p_3 é então

$$p_3 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{p_3}{p_2} \right) p_1 = 1.4677 \times 1.4261 \times 100 = \boxed{209.3 \text{ kPa}}$$

A temperatura estática T_3 é

$$T_3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \left(\frac{T_3}{T_2}\right) T_1 = 1.1177 \times 1.1082 \times 303 = \boxed{375.3 \text{ K}}$$

Finalmente, a pressão de estagnação p_{o3} é

$$p_{o3} = \left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right) \left(\frac{p_{o3}}{p_{o2}}\right) p_{o1} = 0.9943 \times 0.9955 \times 2326 = \boxed{2302 \text{ kPa}}$$

■ Prob. 29

Primeiramente, consideramos a pressão na superfície superior da cunha. Para essa superfície, o número de Mach a montante do choque oblíquo é $M_1 = 2.3$ e o escoamento é girado em um ângulo $\delta = 6^\circ - 4^\circ = 2^\circ$. Entrando com esses valores no webapp de choques oblíquos do *engineering.com*, lê-se a razão de pressões $p_2/p_1 = 1.1311$. Segue que a pressão na superfície superior da cunha é

$$p_{\text{sup}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) p_1 = 1.132 \times 60 = 67.92 \text{ kPa}$$

Consideramos agora a pressão na superfície inferior da cunha. Para essa superfície, o número de Mach a montante do choque oblíquo é novamente $M_1 = 2.4$ e o escoamento é girado em um ângulo $\delta = 6^\circ + 4^\circ = 10^\circ$. Inserindo esses valores no webapp de choques oblíquos, obtemos a razão $p_2/p_1 = 1.7959$. Segue que a pressão na superfície inferior da cunha é

$$p_{\text{inf}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) p_1 = 1.7959 \times 60 = 107.8 \text{ kPa}$$

Finalmente, a diferença Δp entre pressões estáticas nas superfícies superior e inferior é

$$|\Delta p| = |p_{\text{sup}} - p_{\text{inf}}| = |67.92 - 107.8| = \boxed{39.88 \text{ kPa}}$$

■ Prob. 30

Partes (a) e (b): O número de Mach a montante da onda de choque inicial é $M_1 = 3$ e o ângulo de viragem do duto é $\delta = 5^\circ$. Inserindo esses valores no webapp de choques oblíquos, extraímos

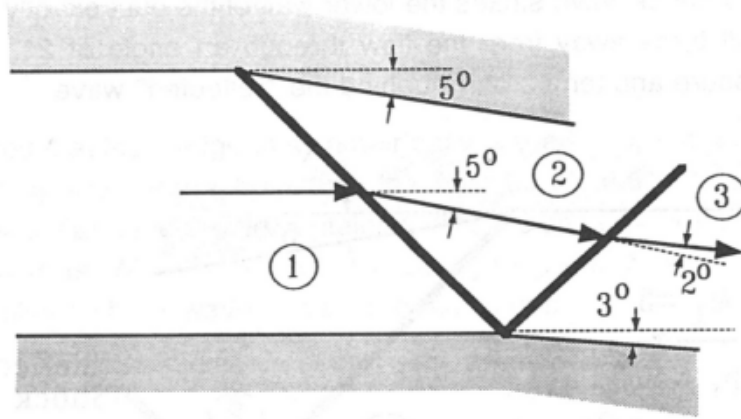
$$M_2 = 2.7497 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_1} = 1.4540 \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.1146$$

Usando esses valores, calculamos

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) p_1 = 1.4540 \times 40 = \boxed{58.16 \text{ kPa}}$$

$$T_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right) T_1 = 1.1146 \times 243 = \boxed{270.8 \text{ K}}$$

Portanto, o número de Mach, a pressão e a temperatura a jusante do primeiro choque oblíquo são respectivamente iguais a ~ 2.75 , 58.16 kPa e 270.8 K. Considere agora o choque oblíquo formado após o choque original atingir a parede inferior do duto. Sabe-se que o escoamento a jusante dessa onda deve ser paralelo à parede inferior do duto; assim sendo, o ângulo de viragem é $\delta = 5^\circ - 2^\circ = 3^\circ$.



Continuando, o número de Mach a montante do choque refletido é $M_2 = 2.7497$ e a onda curva o escoamento em $\delta = 3^\circ$. Entrando com esses valores no webapp de choques oblíquos, obtemos

$$M_3 = 2.6116 \quad ; \quad \frac{p_3}{p_2} = 1.2358 \quad ; \quad \frac{T_3}{T_2} = 1.0627$$

Usando esses valores, tem-se

$$p_3 = \left(\frac{p_3}{p_2} \right) p_2 = 1.2358 \times 58.16 = \boxed{71.87 \text{ kPa}}$$

$$T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \right) T_2 = 1.0627 \times 270.8 = \boxed{287.8 \text{ K}}$$

Por fim, concluímos que o número de Mach, a pressão e a temperatura a jusante do primeiro choque oblíquo são respectivamente iguais a ~ 2.61 , 71.87 kPa e 287.8 K.

■ Prob. 31

Parte (a): Para iniciar a solução, inserimos $M_1 = 2.4$ e $\delta = 7^\circ$ no webapp de choques oblíquos do *engineering.com* e obtemos $\theta = 30.25^\circ$. Segue que o número de Mach normal M_{1n} é

$$M_{1n} = M_1 \sin \theta = 2.4 \times \sin(30.25^\circ) = 1.209$$

Entramos com esse valor no webapp de choques normais e lemos as razões $p_2/p_1 = 1.5386$, $T_2/T_1 = 1.1336$ e $p_{o2}/p_{o1} = 0.9919$. Tem-se também o Mach normal a jusante $M_{2n} = 0.836$, que podemos utilizar para computar o Mach M_2 ,

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\theta - \delta)} = \frac{0.836}{\sin(30.25^\circ - 7^\circ)} = 2.1178$$

Entrando com esse Mach no webapp de choques normais, lemos as razões $p_3/p_2 = 5.0659$, $T_3/T_2 = 1.7856$ e $p_{o3}/p_{o2} = 0.6659$; tem-se também o Mach normal $M_3 = 0.5586$. Prosseguimos para calcular as propriedades do escoamento nas seções 2 e 3,

$$p_2 = 1.5386 p_1 = 1.5386 \times (0.5 \times 10^5) = 76,930 \text{ Pa} = 76.93 \text{ kPa}$$

$$T_2 = 1.1336 T_1 = 1.1336 \times 280 = 317.4 \text{ K}$$

$$p_3 = 5.0659 p_2 = 5.0659 \times 76,900 = 389,570 \text{ Pa} = 389.6 \text{ kPa}$$

$$T_3 = 1.7856 T_2 = 1.7856 \times 317.4 = 566.7 \text{ K}$$

Para determinar a área $A_i = A_3$ da entrada, podemos usar a equação da continuidade,

$$\dot{m} = \rho_3 A_3 V_3 \rightarrow A_3 = \frac{\dot{m}}{\rho_3 V_3} \quad \text{(I)}$$

onde

$$\rho_3 = \frac{p_3}{RT_3} = \frac{389.6 \times 10^3}{287 \times 566.7} = 2.40 \text{ kg/m}^3$$

$$V_3 = M_3 a_3 = 0.5586 \times \sqrt{\gamma RT_3} = 0.5586 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 566.7} = 266.6 \text{ m/s}$$

Substituindo em (I),

$$A_3 = \frac{20}{2.40 \times 266.6} \approx 0.0313 \text{ m}^2 = \boxed{313 \text{ cm}^2}$$

Parte (b): Na saída, $M_e = V_e/a_e$. Pela equação da energia, podemos escrever

$$\frac{V_e^2}{2} + \frac{a_e^2}{\gamma - 1} = \frac{a_{oe}^2}{\gamma - 1}$$

Substituindo $\gamma = 1.4$ e resolvendo para a velocidade do som a_e , temos

$$\frac{V_e^2}{2} + \frac{a_e^2}{1.4-1} = \frac{a_{oe}^2}{1.4-1} \rightarrow 0.5V_e^2 + 2.5a_e^2 = 2.5a_{oe}^2$$

$$\therefore 0.5V_e^2 + 2.5a_e^2 = 2.5a_{oe}^2$$

$$\therefore a_e^2 = \frac{2.5a_{oe}^2 - 0.5V_e^2}{2.5}$$

$$\therefore a_e^2 = a_{oe}^2 - 0.2V_e^2$$

$$\therefore a_e = \sqrt{a_{oe}^2 - 0.2V_e^2} \quad \text{(II)}$$

Para obter a_e com o lado direito da equação **(II)**, precisamos antes determinar a velocidade total a_{oe} . Para tanto, note que, com $M_1 = 2.4$ na entrada, podemos recorrer ao webapp de escoamentos isentrópicos e extrair $T_1/T_{o1} = 0.4648$. Segue que $T_{o1} = 280/0.4648 = 602.4$ K. Feito isso, determinamos a_{oe} ,

$$a_{oe} = \sqrt{\gamma RT_{o1}} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 602.4} = 492.0 \text{ m/s}$$

Substituindo em **(II)**,

$$a_e = \sqrt{492.0^2 - 0.2 \times 30^2} = 491.8 \text{ m/s}$$

O número de Mach na saída é então

$$M_e = \frac{V_e}{a_e} = \frac{30}{491.8} = 0.0610$$

Entrando com esse Mach no webapp de escoamentos isentrópicos, extraímos $p_e/p_{o3} = 0.9974$ e $T_e/T_{o3} = 0.9993$. Ademais, para $M_3 = 0.5586$ (que foi obtido no início da solução), podemos recorrer ao webapp novamente e ler $p_3/p_{o3} = 0.8091$ e $T_3/T_{o3} = 0.9413$. Podemos prosseguir e determinar a pressão p_e na saída do sistema,

$$p_e = \left(\frac{p_e}{p_{o3}}\right) \left(\frac{p_{o3}}{p_3}\right) p_3 = 0.9974 \times \frac{1}{0.8091} \times (386.3 \times 10^3) = 476,200 \text{ Pa} = \boxed{476.2 \text{ kPa}}$$

Para estabelecer a área A_e da saída, precisamos também da temperatura T_e ,

$$T_e = \left(\frac{T_e}{T_{o3}}\right) \left(\frac{T_{o3}}{T_3}\right) T_3 = 0.9993 \times \frac{1}{0.9413} \times 566.7 = 601.6 \text{ K}$$

Utilizamos p_e e T_e para computar a densidade do ar na saída,

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = \frac{476,200}{287 \times 601.6} = 2.758 \text{ kg/m}^3$$

Por fim, a área A_e é

$$A_e = \frac{\dot{m}_{\max}}{\rho_e V_e} = \frac{20}{2.758 \times 30} = 0.242 \text{ m}^2 = \boxed{2420 \text{ cm}^2}$$

■ Prob. 32

Parte (a): Inserindo $M_1 = 2.2$ e $\delta = 6^\circ$ no webapp de choques oblíquos, obtemos $\theta = 31.98^\circ$. Segue que o número de Mach normal ao choque é $M_{1n} = M_1 \times \sin \theta = 2.2 \times \sin(31.98^\circ) = 1.165$. Entrando com esse resultado no webapp de choques normais, obtemos a razão de pressões de estagnação $p_{o2}/p_{o1} = 0.9957$ e o número de Mach normal a jusante $M_2 = 0.8648$. O Mach da seção 2 é, portanto,

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\theta - \delta)} = \frac{0.8648}{\sin(31.98^\circ - 6^\circ)} = 1.974$$

Inserimos esse Mach no webapp de choques normais e lemos a razão de pressões de estagnação $p_{o3}/p_{o2} = 0.7330$. Podemos então computar a razão de pressões de estagnação p_{o3}/p_{o1} ,

$$\frac{p_{o3}}{p_{o1}} = \left(\frac{p_{o3}}{p_{o2}} \right) \left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right) = 0.7330 \times 0.9957 = 0.7298$$

Isso implica uma perda de pressão de $(1 - 0.7298) \times 100\% = 27.02\%$.

Parte (b): A análise entre as estações 1 e 2 é idêntica à adotada na parte (a). As coisas mudam na transição da região 2 para a região 3, onde observamos um choque oblíquo adicional com ângulo de viragem $\delta = 6^\circ$. Entrando com $M_2 = 1.974$ e o supracitado valor de δ no webapp de choques oblíquos, lemos $\theta = 35.73^\circ$. Segue que o Mach normal ao choque é $M_{2n} = M_2 \times \sin \theta = 1.974 \times \sin(35.73^\circ) = 1.1528$. Entramos com M_{2n} no webapp de choques normais e lemos $p_{o3}/p_{o2} = 0.9965$ e $M_{2n} = 0.8731$. O Mach da seção 3 é então

$$M_3 = \frac{M_{3n}}{\sin(\theta - \delta)} = \frac{0.8731}{\sin(35.73^\circ - 6^\circ)} = 1.7606$$

Introduzimos $M_3 = 1.7606$ no webapp de choques normais e obtemos $p_{o4}/p_{o3} = 0.8300$. Podemos então computar a razão de pressões p_{o4}/p_{o1} ,

$$\frac{p_{o4}}{p_{o1}} = \left(\frac{p_{o4}}{p_{o3}} \right) \left(\frac{p_{o3}}{p_{o2}} \right) \left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right) = 0.830 \times 0.9965 \times 0.9957 = 0.8235$$

Isso implica uma perda de pressão tal que $(1 - 0.8235) \times 100\% = 17.65\%$. Comparando esse resultado com o anterior ($= 27.02\%$), verifica-se que a queda de pressão do sistema analisado na parte (b) é aproximadamente 10 pontos percentuais maior que a queda de pressão obtida na parte (a).

■ Prob. 33

Parte (a): A análise para o sistema em (a) é extremamente simples: basta inserir o número de Mach de entrada, $M_1 = 3.0$, no webapp de choques normais do *engineering.com* e ler a razão de pressões de estagnação fornecida pelo programa; no caso, o resultado é $p_{o2}/p_{o1} = 0.32834$.

Parte (b): Na transição entre o escoamento livre a montante do difusor (seção 1) e a seção logo a jusante do primeiro choque oblíquo (seção 2), tem-se $M_1 = 3.0$ e $\delta = 8^\circ$. Entrando com esses dados no webapp de choques oblíquos, extraímos $\theta = 25.61^\circ$ e $M_2 = 2.6031$. Em seguida, considerando o segundo choque oblíquo, inserimos $M_2 = 2.6031$ e $\delta = 8^\circ$ no webapp de choques oblíquos para obter $\theta = 28.94^\circ$ e $M_3 = 2.2595$. Note agora que a componente normal do número de Mach M_1 é $M_{1n} = M_1 \times \sin(25.61^\circ) = 3.0 \times \sin(25.61^\circ) = 1.2967$; entramos com esse valor no webapp de choques normais e lemos $p_{o2}/p_{o1} = 0.9799$. Analogamente, a componente normal de M_2 é $M_{2n} = M_2 \times \sin(28.94^\circ) = 2.6031 \times \sin(28.94^\circ) = 1.260$; entramos com esse valor no webapp de choques normais e lemos $p_{o3}/p_{o2} = 0.9857$. Por fim, inserimos $M_3 = 2.2595$ no webapp de choques normais e obtemos $p_{o4}/p_{o3} = 0.6013$. Conhecendo esses valores, resta apenas calcular a razão de pressões de estagnação p_{o4}/p_{o1} ,

$$\frac{p_{o4}}{p_{o1}} = \left(\frac{p_{o4}}{p_{o3}} \right) \left(\frac{p_{o3}}{p_{o2}} \right) \left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right) = 0.6013 \times 0.9857 \times 0.9799 = \boxed{0.5808}$$

Nota-se que a queda de pressão obtida com o difusor simples da parte (a) é $(1 - 0.32834) \times 100\% = 67.17\%$, ao passo que com o sistema de choques da parte (b) esta é apenas $(1 - 0.5808) \times 100\% = 41.92\%$.

■ Prob. 34

O número de Mach a montante do primeiro choque oblíquo é 4.0 e o ângulo de viragem é $\delta = 15^\circ$. Inserimos esses valores no webapp de choques oblíquos para obter

$$M_2 = 2.9290 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_1} = 3.6973 \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.5465$$

O número de Mach a montante do segundo choque oblíquo é $M_2 = 2.929$ e o ângulo de viragem é novamente $\delta = 15^\circ$. Entramos com esses valores no webapp de choques oblíquos e lemos

$$M_3 = 2.2028 \quad ; \quad \frac{p_3}{p_2} = 2.7676 \quad ; \quad \frac{T_3}{T_2} = 1.3783$$

Considere agora a onda de choque normal que ocorre atrás do segundo choque oblíquo. Entramos com $M_3 = 2.2028$ no webapp de choques normais e lemos

$$M_4 = 0.5467 \quad ; \quad \frac{p_4}{p_3} = 5.4944 \quad ; \quad \frac{T_4}{T_3} = 1.8593$$

Após atravessar o choque normal, o escoamento é isentropicamente desacelerado até atingir Mach 0.1. Entrando com $M_4 = 0.5467$ no webapp de escoamentos isentrópicos, tem-se

$$\frac{p_4}{p_{o4}} = 0.8161 \quad ; \quad \frac{T_4}{T_{o4}} = 0.9436$$

Inserindo $M_5 = 0.1$ no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se

$$\frac{p_5}{p_{o5}} = 0.9930 \quad ; \quad \frac{T_5}{T_{o5}} = 0.9980$$

Sabendo que o escoamento a jusante do sistema de choques é isentrópico, escrevemos $p_{o5} = p_{o4}$ e $T_{o5} = T_{o4}$. (Haja vista que a temperatura de estagnação é a mesma em todo o sistema, este último resultado aplica-se a todo o escoamento.) Podemos reunir nossos resultados e computar a pressão estática p_5 ,

$$p_5 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{p_3}{p_2} \right) \left(\frac{p_4}{p_3} \right) \left(\frac{p_{o4}}{p_4} \right) \left(\frac{p_5}{p_{o5}} \right) p_1$$

$$\therefore p_5 = 3.6973 \times 2.7676 \times 5.4944 \times \frac{1}{0.8161} \times 0.9930 \times 30 = \boxed{2052 \text{ kPa}}$$

e a temperatura estática T_5 ,

$$T_5 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{T_3}{T_2} \right) \left(\frac{T_4}{T_3} \right) \left(\frac{T_{o4}}{T_4} \right) \left(\frac{T_5}{T_{o5}} \right) T_1$$

$$\therefore T_5 = 1.5465 \times 1.3783 \times 1.8593 \times \frac{1}{0.9436} \times 0.9980 \times 228 = \boxed{955.7 \text{ K}}$$

Os resultados acima indicam que a pressão e temperatura na entrada do sistema combustor são respectivamente iguais a 2052 kPa e 955.7 K. Considere agora a situação na qual o sistema de choques que acabamos de analisar é substituído por uma única onda de choque normal. Para um choque com número de Mach a montante 4.0, podemos recorrer ao webapp de choques normais e ler

$$M_2 = 0.435 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_{o2}} = 18.50 \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = 4.0469$$

O escoamento a jusante do choque normal é isentropicamente desacelerado até atingir Mach 0.1. Entrando com $M_2 = 0.435$ no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se

$$\frac{p_2}{p_{o2}} = 0.8781 \quad ; \quad \frac{T_2}{T_{o2}} = 0.9635$$

Inserimos $M_3 = 0.1$ no referido webapp para obter

$$\frac{p_3}{p_{o3}} = 0.9930 \quad ; \quad \frac{T_3}{T_{o3}} = 0.9980$$

Resta apenas calcular a pressão e a temperatura estáticas, quais sejam,

$$p_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{p_{o2}}{p_2}\right) \left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right) p_1 = 18.50 \times \frac{1}{0.8781} \times 0.9930 \times 30 = \boxed{627.6 \text{ kPa}}$$

$$T_3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \left(\frac{T_{o2}}{T_2}\right) \left(\frac{T_3}{T_{o3}}\right) T_1 = 4.0469 \times \frac{1}{0.9635} \times 0.9980 \times 228 = \boxed{955.7 \text{ K}}$$

Os resultados acima mostram que, quando o sistema de ondas analisado anteriormente é substituído por um único choque normal, a pressão e a temperatura obtidos na entrada do combustor são respectivamente iguais a 627.6 kPa e 955.7 K. A temperatura é a mesma em ambos os casos porque em ambos os arranjos não há variações em temperatura de estagnação ao longo de qualquer choque. Já a pressão estática obtida com o sistema de ondas analisado na primeira parte do problema é cerca de $2052/627.6 = 3.27$ vezes maior que a pressão obtida com um único choque normal.

■ Prob. 35

Primeiramente, inserimos $M_1 = 2.2$ e $\theta = 40^\circ$ no webapp de choques oblíquos do *engineering.com* e lemos os parâmetros e razões (designamos com o subscrito '2' a região intermediária a jusante de uma das ondas originais mas a montante da região de interseção)

$$\delta = 13.92^\circ \quad ; \quad M_2 = 1.6691 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_1} = 2.1664 \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.2638$$

Em seguida, inserimos $M_2 = 1.6691$ e $\delta = 13.92^\circ$ no mesmo webapp para obter (designamos com o subscrito '2' a região intermediária a jusante da interseção entre ondas)

$$\boxed{M_3 = 1.1401} \quad ; \quad \frac{p_3}{p_2} = 2.0256 \quad ; \quad \frac{T_3}{T_2} = 1.2359$$

Podemos prosseguir e determinar a pressão estática p_3 ,

$$\frac{p_3}{p_1} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \rightarrow p_3 = \left(\frac{p_3}{p_2}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right) p_1$$

$$\therefore p_3 = 2.0256 \times 2.1664 \times 70 = \boxed{307.2 \text{ kPa}}$$

e a temperatura estática T_3 ,

$$\frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right) \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \rightarrow T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2}\right) \left(\frac{T_2}{T_1}\right) T_1$$

$$\therefore T_3 = 1.2359 \times 1.2638 \times 270 = \boxed{421.7 \text{ K}}$$

A velocidade do som a_3 é dada por

$$a_3 = \sqrt{\gamma RT_3} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 421.7} = 411.6 \text{ m/s}$$

Por fim, lembrando que $M_3 = 1.1401$, a velocidade de escoamento V_3 é

$$V_3 = M_3 a_3 = 1.1401 \times 411.6 = \boxed{469.3 \text{ m/s}}$$

■ Prob. 36

Primeiramente, consideramos as condições a jusante das duas ondas de choque oblíquas iniciais, ou seja, nas regiões 2 e 3. Para a região 2, entramos com $M = 3$ e $\delta = 9^\circ$ no webapp de choques oblíquos e lemos $M_2 = 2.554$ e $p_2/p_1 = 1.9216$. Para a região 3, inserimos $M = 3$ e $\delta = 5^\circ$ no webapp de choques oblíquos e lemos $M_3 = 2.7497$ e $p_3/p_1 = 1.4540$. Considere agora a região 4. Sabe-se que a intensidade dos choques após a interseção deve ser tal que a pressão e a direção de escoamento sejam as mesmas ao longo da região em foco. Podemos dividir a região 4 em duas partes, quais sejam, (I) a região '42,' localizada a jusante da região 2; e (II) a região '43,' localizada a jusante da região 3. A solução deve ser tal que as direções de escoamento e as pressões estáticas em 42 e 43 devem ser iguais. Seguindo Oosthuizen e Carscallen (2013), solucionamos o problema com uma abordagem bastante simples. Propõe-se uma mesma direção de escoamento para as regiões 42 e 43. Essa direção será denotada por Δ e refere-se à direção do escoamento relativamente ao escoamento a montante dos choques oblíquos iniciais. O ângulo de viragem produzido pela onda de choque oblíqua entre as regiões 2 e 42 é dado por

$$\delta = 9^\circ - \Delta$$

Analogamente, o ângulo de viragem produzido pela onda de choque oblíqua entre as regiões 3 e 43 é dado por

$$\delta = 5^\circ + \Delta$$

Para a direção de escoamento suposta, pode-se determinar as razões de pressões p_{42}/p_1 e p_{43}/p_1 e, em seguida, as pressões p_{42} e p_{43} propriamente ditas. Essas pressões provavelmente não serão as mesmas porque o valor de Δ foi selecionado arbitrariamente. O procedimento é repetido para vários valores de Δ até encontrarmos um Δ para o qual $p_{42} = p_{43} = p_4$. Para ilustrar o uso da técnica em questão, seja $\Delta = 3^\circ$. Nesse caso, o ângulo de viragem entre as regiões 2 e 42 é $\delta = 9^\circ - 3^\circ = 6^\circ$ e o número de Mach em '2' é $M_2 = 2.554$, como calculado anteriormente. Entramos com os dois parâmetros ($\delta = 6^\circ$ e $M_2 = 2.554$) no webapp de choques oblíquos e extraímos $p_{42}/p_2 = 1.4775$. Analogamente, para as regiões 3 e 43, substituindo $\Delta = 3^\circ$ resulta em $\delta = 5^\circ + 3^\circ = 8^\circ$ e o número de Mach em '3' é $M_3 = 2.7497$, como calculado anteriormente. Inserimos os dois parâmetros ($\delta = 8^\circ$ e $M_3 = 2.7497$) no webapp de choques oblíquos e extraímos $p_{43}/p_3 = 1.7238$. Podemos então obter a pressão p_{42} desejada,

$$p_{42} = \left(\frac{p_{42}}{p_2} \right) \left(\frac{p_2}{p_1} \right) p_1 = 1.4775 \times 1.9216 \times 50 = 142.0 \text{ kPa}$$

e também a pressão p_{43} ,

$$p_{43} = \left(\frac{p_{43}}{p_3} \right) \left(\frac{p_3}{p_1} \right) p_1 = 1.7238 \times 1.4540 \times 50 = 125.3 \text{ kPa}$$

Os valores de p_{42} e p_{43} são consideravelmente diferentes, logo o valor de Δ pressuposto ($\Delta = 3^\circ$) não é aceitável; faz-se necessária uma nova iteração. Suponha agora que $\Delta = 4^\circ$. O ângulo de viragem entre as regiões 2 e 42 é agora $\delta = 9^\circ - 4^\circ = 5^\circ$ e o número de Mach em '2' segue sendo $M_2 = 2.554$. Inserindo esses valores no webapp de choques oblíquos, extraímos $p_{42}/p_2 = 1.3876$. Analogamente, para as regiões 3 e 43, substituindo $\Delta = 4^\circ$ resulta em $\delta = 5^\circ + 4^\circ = 9^\circ$ e o número de Mach em '3' segue sendo $M_3 = 2.7497$. Inserimos os dois parâmetros ($\delta = 9^\circ$ e $M_3 = 2.7497$) no webapp de choques oblíquos e extraímos $p_{43}/p_3 = 1.8370$. Podemos prosseguir e calcular a pressão p_{42} desejada,

$$p_{42} = \left(\frac{p_{42}}{p_2} \right) \left(\frac{p_2}{p_1} \right) p_1 = 1.3876 \times 1.9216 \times 50 = 133.3 \text{ kPa}$$

e também a pressão p_{43} ,

$$p_{43} = \left(\frac{p_{43}}{p_3} \right) \left(\frac{p_3}{p_1} \right) p_1 = 1.8370 \times 1.4540 \times 50 = 133.6 \text{ kPa}$$

Os valores de p_{42} e p_{43} são razoavelmente próximos, então tomamos $\Delta = 4^\circ$ e concluímos que $p_4 \approx 133.5 \text{ kPa}$; essa é a pressão estática a jusante da interseção de ondas.

■ Referências (★ → Livro altamente recomendado)

1. JOHN, J.E.; KEITH, T.G. **Gas Dynamics**. 3. ed. Pearson, 2006. ★
2. OOSTHUIZEN, P.H.; CARSCALLEN, W.E. **Introduction to Compressible Fluid Flow**. 2. ed. CRC Press, 2014. ★
3. RATHAKRISHNAN, E. **Gas Dynamics**. 6. ed. PHI Learning, 2017.
4. ZUCKER, R.D.; BIBLARZ, O. **Fundamentals of Gas Dynamics**. 3. ed. John Wiley and Sons, 2020

→ Referências de cada problema

Problema	Ref.	Problema	Ref.
1	[1]	13	[1]
2	[2]	14	[1]
3	[1]	15	[1]
4	[2]	16	[1]
5	[2]	17	[4]
6	[1]	18	[4]
7	[1]	19	[4]
8	[3]	20	[1]
9	[2]	21	[2]
10	[2]	22	[2]
11	[2]	23	[2]
12	[2]	24	[2]

■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

WhatsApp: (61) 981247059

Email: lucas_0150@hotmail.com





Apêndice

■ Nas páginas seguintes, temos algumas tabelas de propriedades termomecânicas para escoamentos isentrópicos unidimensionais. As tabelas foram extraídas de John e Keith (2006). (No Brasil, costuma-se utilizar o termo 'anexo' para referenciar um documento adicional que não foi produzido pelo autor principal. Não obstante, creio que essa definição é obsoleta e deve ser revista, uma vez que fontes anglófonas prestigiosas como [Springer Nature](#), [Michalsons](#), [Study.com](#) e [Key Differences](#) **não** utilizam essa distinção. ■

Appendix B

Isentropic Flow Tables

TABLE B.1 Isentropic Flow Table ($\gamma = 1.4$)

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*	M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞	0.94	0.8498	0.5658	0.6658	1.0031
0.02	0.9999	0.9997	0.9998	28.9421	0.96	0.8444	0.5532	0.6551	1.0014
0.04	0.9997	0.9989	0.9992	14.4815	0.98	0.8389	0.5407	0.6445	1.0003
0.06	0.9993	0.9975	0.9982	9.6659	1.00	0.8333	0.5283	0.6339	1.0000
0.08	0.9987	0.9955	0.9968	7.2616	1.02	0.8278	0.5160	0.6234	1.0003
0.10	0.9980	0.9930	0.9950	5.8218	1.04	0.8222	0.5039	0.6129	1.0013
0.12	0.9971	0.9900	0.9928	4.8643	1.06	0.8165	0.4919	0.6024	1.0029
0.14	0.9961	0.9864	0.9903	4.1824	1.08	0.8108	0.4800	0.5920	1.0051
0.16	0.9949	0.9823	0.9873	3.6727	1.10	0.8052	0.4684	0.5817	1.0079
0.18	0.9936	0.9776	0.9840	3.2779	1.12	0.7994	0.4568	0.5714	1.0113
0.20	0.9921	0.9725	0.9803	2.9635	1.14	0.7937	0.4455	0.5612	1.0153
0.22	0.9904	0.9668	0.9762	2.7076	1.16	0.7879	0.4343	0.5511	1.0198
0.24	0.9886	0.9607	0.9718	2.4956	1.18	0.7822	0.4232	0.5411	1.0248
0.26	0.9867	0.9541	0.9670	2.3173	1.20	0.7764	0.4124	0.5311	1.0304
0.28	0.9846	0.9470	0.9619	2.1656	1.22	0.7706	0.4017	0.5213	1.0366
0.30	0.9823	0.9395	0.9564	2.0351	1.24	0.7648	0.3912	0.5115	1.0432
0.32	0.9799	0.9315	0.9506	1.9219	1.26	0.7590	0.3809	0.5019	1.0504
0.34	0.9774	0.9231	0.9445	1.8229	1.28	0.7532	0.3708	0.4923	1.0581
0.36	0.9747	0.9143	0.9380	1.7358	1.30	0.7474	0.3609	0.4829	1.0663
0.38	0.9719	0.9052	0.9313	1.6587	1.32	0.7416	0.3512	0.4736	1.0750
0.40	0.9690	0.8956	0.9243	1.5901	1.34	0.7358	0.3417	0.4644	1.0842
0.42	0.9659	0.8857	0.9170	1.5289	1.36	0.7300	0.3323	0.4553	1.0940
0.44	0.9627	0.8755	0.9094	1.4740	1.38	0.7242	0.3232	0.4463	1.1042
0.46	0.9594	0.8650	0.9016	1.4246	1.40	0.7184	0.3142	0.4374	1.1149
0.48	0.9559	0.8541	0.8935	1.3801	1.42	0.7126	0.3055	0.4287	1.1262
0.50	0.9524	0.8430	0.8852	1.3398	1.44	0.7069	0.2969	0.4201	1.1379
0.52	0.9487	0.8317	0.8766	1.3034	1.46	0.7011	0.2886	0.4116	1.1501
0.54	0.9449	0.8201	0.8679	1.2703	1.48	0.6954	0.2804	0.4032	1.1629
0.56	0.9410	0.8082	0.8589	1.2403	1.50	0.6897	0.2724	0.3950	1.1762
0.58	0.9370	0.7962	0.8498	1.2130	1.52	0.6840	0.2646	0.3869	1.1899
0.60	0.9328	0.7840	0.8405	1.1882	1.54	0.6783	0.2570	0.3789	1.2042
0.62	0.9286	0.7716	0.8310	1.1656	1.56	0.6726	0.2496	0.3710	1.2190
0.64	0.9243	0.7591	0.8213	1.1451	1.58	0.6670	0.2423	0.3633	1.2344
0.66	0.9199	0.7465	0.8115	1.1265	1.60	0.6614	0.2353	0.3557	1.2502
0.68	0.9153	0.7338	0.8016	1.1097	1.62	0.6558	0.2284	0.3483	1.2666
0.70	0.9107	0.7209	0.7916	1.0944	1.64	0.6502	0.2217	0.3409	1.2836
0.72	0.9061	0.7080	0.7814	1.0806	1.66	0.6447	0.2151	0.3337	1.3010
0.74	0.9013	0.6951	0.7712	1.0681	1.68	0.6392	0.2088	0.3266	1.3190
0.76	0.8964	0.6821	0.7609	1.0570	1.70	0.6337	0.2026	0.3197	1.3376
0.78	0.8915	0.6691	0.7505	1.0471	1.72	0.6283	0.1966	0.3129	1.3567
0.80	0.8865	0.6560	0.7400	1.0382	1.74	0.6229	0.1907	0.3062	1.3764
0.82	0.8815	0.6430	0.7295	1.0305	1.76	0.6175	0.1850	0.2996	1.3967
0.84	0.8763	0.6300	0.7189	1.0237	1.78	0.6121	0.1794	0.2931	1.4175
0.86	0.8711	0.6170	0.7083	1.0179	1.80	0.6068	0.1740	0.2868	1.4390
0.88	0.8659	0.6041	0.6977	1.0129	1.82	0.6015	0.1688	0.2806	1.4610
0.90	0.8606	0.5913	0.6870	1.0089	1.84	0.5963	0.1637	0.2745	1.4836
0.92	0.8552	0.5785	0.6764	1.0056	1.86	0.5910	0.1587	0.2686	1.5069

TABLE B.1 (Continued)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*	M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
1.88	0.5859	0.1539	0.2627	1.5308	3.02	0.3541	0.0264	0.0746	4.3160
1.90	0.5807	0.1492	0.2570	1.5553	3.04	0.3511	0.0256	0.0730	4.3989
1.92	0.5756	0.1447	0.2514	1.5804	3.06	0.3481	0.0249	0.0715	4.4835
1.94	0.5705	0.1403	0.2459	1.6062	3.08	0.3452	0.0242	0.0700	4.5696
1.96	0.5655	0.1360	0.2405	1.6326	3.10	0.3422	0.0234	0.0685	4.6573
1.98	0.5605	0.1318	0.2352	1.6597	3.12	0.3393	0.0228	0.0671	4.7467
2.00	0.5556	0.1278	0.2300	1.6875	3.14	0.3365	0.0221	0.0657	4.8377
2.02	0.5506	0.1239	0.2250	1.7160	3.16	0.3337	0.0215	0.0643	4.9304
2.04	0.5458	0.1201	0.2200	1.7451	3.18	0.3309	0.0208	0.0630	5.0248
2.06	0.5409	0.1164	0.2152	1.7750	3.20	0.3281	0.0202	0.0617	5.1210
2.08	0.5361	0.1128	0.2104	1.8056	3.22	0.3253	0.0196	0.0604	5.2189
2.10	0.5313	0.1094	0.2058	1.8369	3.24	0.3226	0.0191	0.0591	5.3186
2.12	0.5266	0.1060	0.2013	1.8690	3.26	0.3199	0.0185	0.0579	5.4201
2.14	0.5219	0.1027	0.1968	1.9018	3.28	0.3173	0.0180	0.0567	5.5234
2.16	0.5173	0.0996	0.1925	1.9354	3.30	0.3147	0.0175	0.0555	5.6286
2.18	0.5127	0.0965	0.1882	1.9698	3.32	0.3121	0.0170	0.0544	5.7358
2.20	0.5081	0.0935	0.1841	2.0050	3.34	0.3095	0.0165	0.0533	5.8448
2.22	0.5036	0.0906	0.1800	2.0409	3.36	0.3069	0.0160	0.0522	5.9558
2.24	0.4991	0.0878	0.1760	2.0777	3.38	0.3044	0.0156	0.0511	6.0687
2.26	0.4947	0.0851	0.1721	2.1153	3.40	0.3019	0.0151	0.0501	6.1837
2.28	0.4903	0.0825	0.1683	2.1538	3.42	0.2995	0.0147	0.0491	6.3007
2.30	0.4859	0.0800	0.1646	2.1931	3.44	0.2970	0.0143	0.0481	6.4198
2.32	0.4816	0.0775	0.1609	2.2333	3.46	0.2946	0.0139	0.0471	6.5409
2.34	0.4773	0.0751	0.1574	2.2744	3.48	0.2922	0.0135	0.0462	6.6642
2.36	0.4731	0.0728	0.1539	2.3164	3.50	0.2899	0.0131	0.0452	6.7896
2.38	0.4688	0.0706	0.1505	2.3593	3.52	0.2875	0.0127	0.0443	6.9172
2.40	0.4647	0.0684	0.1472	2.4031	3.54	0.2852	0.0124	0.0434	7.0471
2.42	0.4606	0.0663	0.1439	2.4479	3.56	0.2829	0.0120	0.0426	7.1791
2.44	0.4565	0.0643	0.1408	2.4936	3.58	0.2806	0.0117	0.0417	7.3135
2.46	0.4524	0.0623	0.1377	2.5403	3.60	0.2784	0.0114	0.0409	7.4501
2.48	0.4484	0.0604	0.1346	2.5880	3.62	0.2762	0.0111	0.0401	7.5891
2.50	0.4444	0.0585	0.1317	2.6367	3.64	0.2740	0.0108	0.0393	7.7305
2.52	0.4405	0.0567	0.1288	2.6865	3.66	0.2718	0.0105	0.0385	7.8742
2.54	0.4366	0.0550	0.1260	2.7372	3.68	0.2697	0.0102	0.0378	8.0204
2.56	0.4328	0.0533	0.1232	2.7891	3.70	0.2675	0.0099	0.0370	8.1691
2.58	0.4289	0.0517	0.1205	2.8420	3.72	0.2654	0.0096	0.0363	8.3202
2.60	0.4252	0.0501	0.1179	2.8960	3.74	0.2633	0.0094	0.0356	8.4739
2.62	0.4214	0.0486	0.1153	2.9511	3.76	0.2613	0.0091	0.0349	8.6302
2.64	0.4177	0.0471	0.1128	3.0073	3.78	0.2592	0.0089	0.0342	8.7891
2.66	0.4141	0.0457	0.1103	3.0647	3.80	0.2572	0.0086	0.0335	8.9506
2.68	0.4104	0.0443	0.1079	3.1233	3.82	0.2552	0.0084	0.0329	9.1148
2.70	0.4068	0.0430	0.1056	3.1830	3.84	0.2532	0.0082	0.0323	9.2817
2.72	0.4033	0.0417	0.1033	3.2440	3.86	0.2513	0.0080	0.0316	9.4513
2.74	0.3998	0.0404	0.1010	3.3061	3.88	0.2493	0.0077	0.0310	9.6237
2.76	0.3963	0.0392	0.0989	3.3695	3.90	0.2474	0.0075	0.0304	9.7990
2.78	0.3928	0.0380	0.0967	3.4342	3.92	0.2455	0.0073	0.0299	9.9771
2.80	0.3894	0.0368	0.0946	3.5001	3.94	0.2436	0.0071	0.0293	10.1581
2.82	0.3860	0.0357	0.0926	3.5674	3.96	0.2418	0.0069	0.0287	10.3420
2.84	0.3827	0.0347	0.0906	3.6359	3.98	0.2399	0.0068	0.0282	10.5289
2.86	0.3794	0.0336	0.0886	3.7058	4.00	0.2381	0.0066	0.0277	10.7188
2.88	0.3761	0.0326	0.0867	3.7771	4.02	0.2363	0.0064	0.0271	10.9117
2.90	0.3729	0.0317	0.0849	3.8498	4.04	0.2345	0.0062	0.0266	11.1077
2.92	0.3696	0.0307	0.0831	3.9238	4.06	0.2327	0.0061	0.0261	11.3068
2.94	0.3665	0.0298	0.0813	3.9993	4.08	0.2310	0.0059	0.0256	11.5091
2.96	0.3633	0.0289	0.0796	4.0763	4.10	0.2293	0.0058	0.0252	11.7147
2.98	0.3602	0.0281	0.0779	4.1547	4.12	0.2275	0.0056	0.0247	11.9234
3.00	0.3571	0.0272	0.0762	4.2346	4.14	0.2258	0.0055	0.0242	12.1354

TABLE B.1 (Continued)

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*	M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
4.16	0.2242	0.0053	0.0238	12.3508	4.64	0.1885	0.0029	0.0154	18.6303
4.18	0.2225	0.0052	0.0234	12.5695	4.66	0.1872	0.0028	0.0152	18.9433
4.20	0.2208	0.0051	0.0229	12.7916	4.68	0.1859	0.0028	0.0149	19.2608
4.22	0.2192	0.0049	0.0225	13.0172	4.70	0.1846	0.0027	0.0146	19.5828
4.24	0.2176	0.0048	0.0221	13.2463	4.72	0.1833	0.0026	0.0144	19.9095
4.26	0.2160	0.0047	0.0217	13.4789	4.74	0.1820	0.0026	0.0141	20.2409
4.28	0.2144	0.0046	0.0213	13.7151	4.76	0.1808	0.0025	0.0139	20.5770
4.30	0.2129	0.0044	0.0209	13.9549	4.78	0.1795	0.0025	0.0137	20.9179
4.32	0.2113	0.0043	0.0205	14.1984	4.80	0.1783	0.0024	0.0134	21.2637
4.34	0.2098	0.0042	0.0202	14.4456	4.82	0.1771	0.0023	0.0132	21.6144
4.36	0.2083	0.0041	0.0198	14.6965	4.84	0.1759	0.0023	0.0130	21.9700
4.38	0.2067	0.0040	0.0194	14.9513	4.86	0.1747	0.0022	0.0128	22.3306
4.40	0.2053	0.0039	0.0191	15.2099	4.88	0.1735	0.0022	0.0125	22.6963
4.42	0.2038	0.0038	0.0187	15.4724	4.90	0.1724	0.0021	0.0123	23.0671
4.44	0.2023	0.0037	0.0184	15.7388	4.92	0.1712	0.0021	0.0121	23.4431
4.46	0.2009	0.0036	0.0181	16.0092	4.94	0.1700	0.0020	0.0119	23.8243
4.48	0.1994	0.0035	0.0178	16.2837	4.96	0.1689	0.0020	0.0117	24.2109
4.50	0.1980	0.0035	0.0174	16.5622	4.98	0.1678	0.0019	0.0115	24.6027
4.52	0.1966	0.0034	0.0171	16.8449	5.00	0.1667	0.0019	0.0113	25.0000
4.54	0.1952	0.0033	0.0168	17.1317	6.00	0.1220	0.0006	0.0052	53.1798
4.56	0.1938	0.0032	0.0165	17.4228	7.00	0.0926	0.0002	0.0026	104.1429
4.58	0.1925	0.0031	0.0163	17.7181	8.00	0.0725	0.0001	0.0014	190.1094
4.60	0.1911	0.0031	0.0160	18.0178	9.00	0.0581	0.0000	0.0008	327.1893
4.62	0.1898	0.0030	0.0157	18.3218	10.00	0.0476	0.0000	0.0005	535.937

TABLE B.2 Isentropic Flow Table ($\gamma = 1.3$)

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*	M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞	1.20	0.8224	0.4285	0.5211	1.0321
0.05	0.9996	0.9984	0.9988	11.7214	1.25	0.8101	0.4015	0.4957	1.0495
0.10	0.9985	0.9935	0.9950	5.8860	1.30	0.7978	0.3757	0.4709	1.0703
0.15	0.9966	0.9855	0.9888	3.9522	1.35	0.7853	0.3509	0.4468	1.0948
0.20	0.9940	0.9744	0.9803	2.9940	1.40	0.7728	0.3273	0.4235	1.1227
0.25	0.9907	0.9604	0.9694	2.4262	1.45	0.7602	0.3049	0.4010	1.1543
0.30	0.9867	0.9435	0.9563	2.0537	1.50	0.7477	0.2836	0.3793	1.1895
0.35	0.9820	0.9241	0.9411	1.7930	1.55	0.7351	0.2635	0.3585	1.2284
0.40	0.9766	0.9023	0.9240	1.6023	1.60	0.7225	0.2446	0.3385	1.2712
0.45	0.9705	0.8784	0.9051	1.4586	1.65	0.7100	0.2268	0.3194	1.3180
0.50	0.9639	0.8525	0.8845	1.3479	1.70	0.6976	0.2100	0.3011	1.3690
0.55	0.9566	0.8251	0.8625	1.2614	1.75	0.6852	0.1944	0.2836	1.4243
0.60	0.9488	0.7962	0.8392	1.1932	1.80	0.6729	0.1797	0.2671	1.4841
0.65	0.9404	0.7662	0.8148	1.1395	1.85	0.6608	0.1660	0.2513	1.5486
0.70	0.9315	0.7354	0.7895	1.0972	1.90	0.6487	0.1533	0.2363	1.6182
0.75	0.9222	0.7040	0.7634	1.0644	1.95	0.6368	0.1415	0.2222	1.6929
0.80	0.9124	0.6722	0.7367	1.0395	2.00	0.6250	0.1305	0.2087	1.7732
0.85	0.9022	0.6403	0.7097	1.0214	2.05	0.6134	0.1203	0.1961	1.8593
0.90	0.8917	0.6084	0.6823	1.0092	2.10	0.6019	0.1108	0.1841	1.9514
0.95	0.8808	0.5769	0.6549	1.0022	2.15	0.5905	0.1020	0.1728	2.0501
1.00	0.8696	0.5457	0.6276	1.0000	2.20	0.5794	0.0939	0.1621	2.1556
1.05	0.8581	0.5152	0.6004	1.0021	2.25	0.5684	0.0865	0.1521	2.2682
1.10	0.8464	0.4854	0.5735	1.0083	2.30	0.5576	0.0795	0.1427	2.3885
1.15	0.8345	0.4565	0.5470	1.0184	2.35	0.5469	0.0732	0.1338	2.5168

TABLE B.2 (Continued)

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
2.40	0.5365	0.0673	0.1255	2.6535
2.45	0.5262	0.0619	0.1176	2.7993
2.50	0.5161	0.0569	0.1103	2.9545
2.55	0.5062	0.0523	0.1034	3.1197
2.60	0.4965	0.0481	0.0969	3.2954
2.65	0.4870	0.0443	0.0909	3.4824
2.70	0.4777	0.0407	0.0852	3.6811
2.75	0.4685	0.0374	0.0799	3.8922
2.80	0.4596	0.0344	0.0749	4.1165
2.85	0.4508	0.0317	0.0702	4.3546
2.90	0.4422	0.0291	0.0659	4.6073

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
2.95	0.4338	0.0268	0.0618	4.8754
3.00	0.4255	0.0247	0.0580	5.1598
3.50	0.3524	0.0109	0.0309	9.1098
4.00	0.2941	0.0050	0.0169	15.9441
4.50	0.2477	0.0024	0.0095	27.3870
5.00	0.2105	0.0012	0.0056	45.9565
6.00	0.1563	0.0003	0.0021	120.0965
7.00	0.1198	0.0001	0.0008	285.3372
8.00	0.0943	0.0000	0.0004	623.1235
9.00	0.0760	0.0000	0.0002	1265.6040
10.00	0.0625	0.0000	0.0001	2416.1184

TABLE B.3 Isentropic Flow Table ($\gamma = 5/3$)

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞
0.05	0.9992	0.9979	0.9988	11.2688
0.10	0.9967	0.9917	0.9950	5.6626
0.15	0.9926	0.9815	0.9889	3.8065
0.20	0.9868	0.9674	0.9803	2.8880
0.25	0.9796	0.9498	0.9695	2.3447
0.30	0.9709	0.9288	0.9566	1.9892
0.35	0.9608	0.9048	0.9417	1.7411
0.40	0.9494	0.8782	0.9250	1.5603
0.45	0.9368	0.8493	0.9067	1.4244
0.50	0.9231	0.8186	0.8869	1.3203
0.55	0.9084	0.7865	0.8658	1.2394
0.60	0.8929	0.7533	0.8437	1.1760
0.65	0.8766	0.7194	0.8207	1.1263
0.70	0.8596	0.6851	0.7970	1.0875
0.75	0.8421	0.6508	0.7728	1.0576
0.80	0.8242	0.6167	0.7482	1.0351
0.85	0.8059	0.5831	0.7235	1.0189
0.90	0.7874	0.5502	0.6987	1.0081
0.95	0.7687	0.5181	0.6740	1.0019
1.00	0.7500	0.4871	0.6495	1.0000
1.05	0.7313	0.4573	0.6253	1.0018
1.10	0.7126	0.4286	0.6015	1.0071
1.15	0.6940	0.4013	0.5782	1.0154
1.20	0.6757	0.3753	0.5554	1.0268
1.25	0.6575	0.3506	0.5332	1.0408
1.30	0.6397	0.3272	0.5116	1.0575
1.35	0.6221	0.3052	0.4907	1.0767
1.40	0.6048	0.2845	0.4704	1.0983
1.45	0.5879	0.2651	0.4508	1.1222
1.50	0.5714	0.2468	0.4320	1.1484
1.55	0.5553	0.2298	0.4138	1.1769
1.60	0.5396	0.2139	0.3963	1.2076
1.65	0.5242	0.1990	0.3796	1.2404
1.70	0.5093	0.1851	0.3635	1.2754

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
1.75	0.4948	0.1723	0.3481	1.3126
1.80	0.4808	0.1603	0.3334	1.3520
1.85	0.4671	0.1491	0.3192	1.3935
1.90	0.4539	0.1388	0.3058	1.4372
1.95	0.4410	0.1292	0.2929	1.4831
2.00	0.4286	0.1202	0.2806	1.5313
2.05	0.4165	0.1120	0.2688	1.5816
2.10	0.4049	0.1043	0.2576	1.6342
2.15	0.3936	0.0972	0.2469	1.6890
2.20	0.3827	0.0906	0.2367	1.7462
2.25	0.3721	0.0845	0.2270	1.8057
2.30	0.3619	0.0788	0.2177	1.8675
2.35	0.3520	0.0735	0.2088	1.9317
2.40	0.3425	0.0686	0.2004	1.9984
2.45	0.3332	0.0641	0.1924	2.0675
2.50	0.3243	0.0599	0.1847	2.1391
2.55	0.3157	0.0560	0.1774	2.2132
2.60	0.3074	0.0524	0.1704	2.2898
2.65	0.2993	0.0490	0.1638	2.3691
2.70	0.2915	0.0459	0.1574	2.4510
2.75	0.2840	0.0430	0.1514	2.5356
2.80	0.2768	0.0403	0.1456	2.6229
2.85	0.2697	0.0378	0.1401	2.7129
2.90	0.2629	0.0354	0.1348	2.8058
2.95	0.2564	0.0333	0.1298	2.9015
3.00	0.2500	0.0313	0.1250	3.0000
3.50	0.1967	0.0172	0.0873	4.1529
4.00	0.1579	0.0099	0.0627	5.6406
4.50	0.1290	0.0060	0.0463	7.5078
5.00	0.1071	0.0038	0.0351	9.8000
6.00	0.0769	0.0016	0.0213	15.8438
7.00	0.0577	0.0008	0.0139	24.1429
8.00	0.0448	0.0004	0.0095	35.0703
9.00	0.0357	0.0002	0.0067	49.0000
10.00	0.0291	0.0001	0.0050	66.3062