Lista de Exercícios Resolvidos 6

Escoamentos Compressíveis – Parte 2

Lucas Monteiro Nogueira

Escoamentos Compressíveis – Parte 1
Escoamentos Isentrópicos
Ondas de Choque Normais
Ondas de Choque Oblíquas
Escoamentos Compressíveis – Parte 2
Expansões de Prandtl-Meyer
Escoamentos Compressíveis com Atrito (Fanno)
Escoamentos Compressíveis com Transf. de Calor (Rayleigh)

■ Lista de Problemas

➤ Parte 1: Expansões de Prandtl-Meyer

1. *Verdadeiro/Falso – Fundamentos*

2. Geometria da Expansão P-M I

3. Geometria da Expansão P-M II

4. Choques Sucessivos I

5. Choques Sucessivos II

6. Expansões P-M em uma Placa Inclinada

7. Função de Prandtl-Meyer

8. Expansões P-M em uma Cunha

➤ Parte 2: Escoamento de Fanno

9. Escoamento Compressível com Atrito I

10. Escoamento Compressível com Atrito II

11. Escoamento Compressível com Atrito III

12. Vazão Mássica em Escoamento de Fanno

13. Reservatórios e Escoamento de Fanno I

14. Reservatórios e Escoamento de Fanno II

15. Escoamento de Fanno com Choque Normal I

16. Escoamento de Fanno com Choque Normal II

17. Escoamento de Fanno com Choque Normal III

Orientações Diversas

■ Os cálculos de escoamentos unidimensionais isentrópicos e choques normais/oblíquos foram realizados com este webapp disponibilizado pelo site *engineering.com*.

■ Os cálculos de escoamentos de Fanno e Rayleigh foram realizados com este webapp disponibilizado pelo site *Public Domain Aeronautical Software.*

■ Nos cálculos de escoamentos compressíveis com atrito, tenha em mente que os fatores de atrito são fatores de Darcy (f_D) e **não** fatores de Fanning (f_F), exceto quando explicitamente especificado de outra maneira. As duas grandezas são relacionadas pela fórmula $f_D = 4f_F$.

■ Parte 1

■ Problema 1 **(Verdadeiro/Falso – Fundamentos)**

Com relação às teorias de expansões de Prandtl-Meyer, escoamentos compressíveis com atrito (Fanno) e escoamentos compressíveis com transferência de calor (Rayleigh), julgue os itens a seguir.

1.( ) Um reservatório que contém ar (γ = 1.4) sob pressão igual a 3.35 MPa é conectado ao ambiente externo (pressão atmosférica = 101 kPa) por um bocal Laval que opera com Mach 2.0. O escoamento é axial no plano de saída do bocal; uma expansão de Prandtl-Meyer ocorre na saída. Podemos concluir que, após a expansão inicial, o ângulo que o escoamento perfaz com o eixo do bocal é maior que 25°.

2.( ) Um escoamento de gás hidrogênio (γ = 1.4, R = 4124 J/kg·K) flui em um tubo de 25 mm de diâmetro com velocidade na entrada igual a 200 m/s, pressão estática 250 kPa e temperatura estática 303 K. Sabendo que o fator de atrito ao longo do tubo é f = 0.12, podemos concluir que o comprimento de tubo mínimo necessário para estrangular o escoamento em questão é maior que 7 m.

3.( ) Um escoamento de ar com temperatura de estagnação 380 K flui em um duto de 55 m de comprimento. A velocidade do ar na entrada do duto é 90 m/s. Sabendo que o sistema é adiabático e que o fator de atrito no duto é 0.08, o diâmetro mínimo do duto para que o escoamento *não* seja estrangulado enquanto o atravessa é maior que 55 cm.

4.( ). Uma placa plana de comprimento 0.8 m e largura 1.2 m é inserida em um túnel de vento no qual o número de Mach é 4, a temperatura estática é −70°C e a pressão estática é 3 kPa. A temperatura na superfície da placa é mantida a 30°C por um sistema interno de refrigeração. O coeficiente de transferência de calor entre a placa e o ar circundante é 1000 W/m²·K. Podemos concluir que o *valor absoluto* da taxa de transferência de calor entre a placa e o ar é maior que 900 kW. Em sua análise desse item, use Pr = 0.7 como o número de Prandtl do ar.

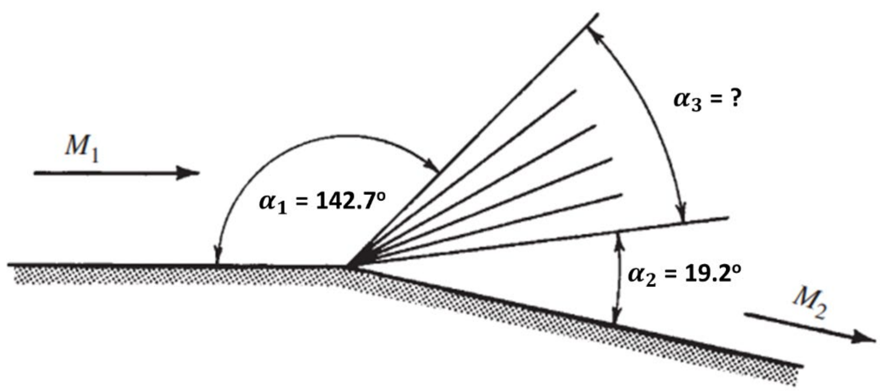
5.( ). Ar com temperatura igual a 120°C e pressão estática 101 kPa adentra um duto de área constante com velocidade igual a 150 m/s. Desprezando efeitos de atrito, a maior taxa de transferência de calor por kg de ar praticável para esse sistema é superior a 400 kJ/kg. Em sua análise desse item, suponha que o calor específico a pressão constante do ar, c_p, é constante e igual a 1.005 kJ/kg·K.

■ Problema 2 **(Geometria da Expansão P-M I)**

Uma fotografia Schlieren do escoamento ao longo de um declive revela uma expansão de Prandtl-Meyer com a geometria delineada na figura a seguir.

(a) Determine o número de Mach antes e após o declive.

(b) Qual é o ângulo de viragem do escoamento, e qual é o ângulo α_3 do leque de expansão?

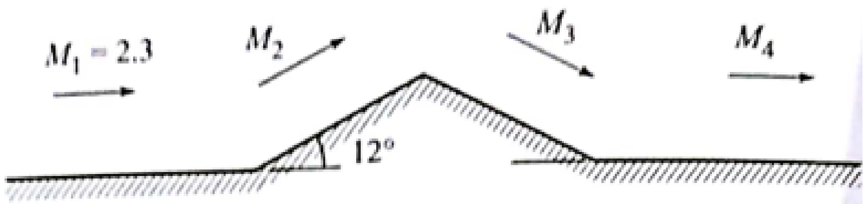


■ Problema 3 **(Geometria da Expansão P-M II)**

Um escoamento de nitrogênio gasoso (γ = 1.4) com 25 psia e 850°R escoa sob número de Mach 2.54. Após expandir-se ao redor de um declive convexo e liso, a velocidade do N_2 passa a ser 4000 ft/sec. Qual é o ângulo de viragem do escoamento?

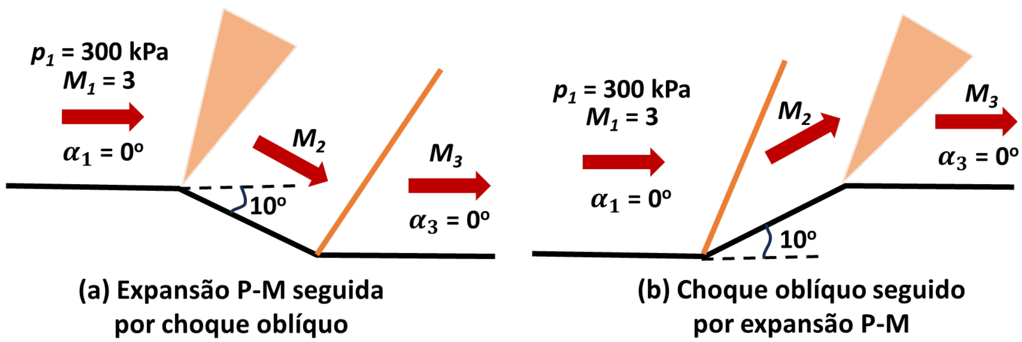
■ Problema 4 **(Choques Sucessivos I)**

Para o escoamento de ar (γ = 1.4) com número de Mach inicial M_1 = 2.3 e temperatura estática T_1 = 300 K sobre o relevo ilustrado na página a seguir, determine os Machs M_2, M_3, M_4 e as temperaturas estáticas T_2, T_3 e T_4.



Problema 5 **(Choques Sucessivos II)**

Um escoamento supersônico uniforme de um gás ideal com γ = 1.4, número de Mach 3.0 e pressão estática a montante 100 kPa flui sobre as geometrias (a) e (b) ilustradas a seguir. Determine a pressão estática a jusante de ambos os sistemas.



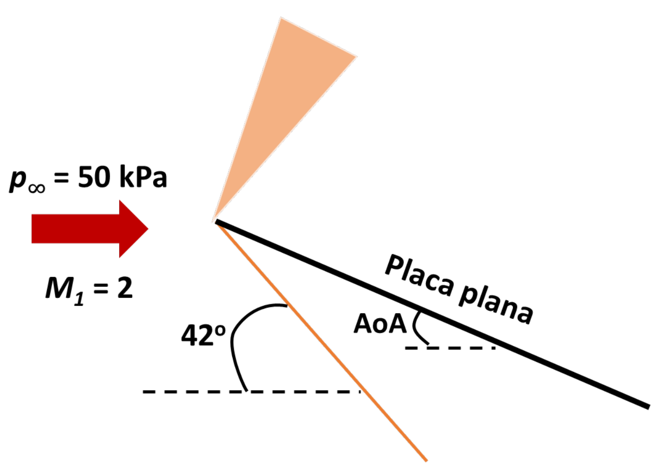
Problema 6 **(Expansões P-M em uma Placa Inclinada)**

Uma placa plana bidimensional está inclinada com ângulo de ataque positivo relativamente a um escoamento supersônico de ar sob Mach 2.0 (veja a figura a seguir). Na região inferior da placa, é formado um choque oblíquo projetado a partir do bordo de ataque; o choque subtende um ângulo de 42° com relação à direção do escoamento vindouro livre. Na região superior da placa, é formada uma expansão de P-M projetada a partir do bordo de ataque.

(a) Encontre o ângulo de ataque (*AoA* na figura a seguir) da placa.

(b) Qual é a pressão na superfície inferior da placa?

(c) Qual é a pressão na superfície superior da placa?



Problema 7 **(Função de Prandtl-Meyer)**

Considere a função de Prandtl-Meyer,

$$\nu = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2} \tan^{-1}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)\right]^{1/2} - \tan^{-1}\left[\sqrt{M^2-1}\right]$$

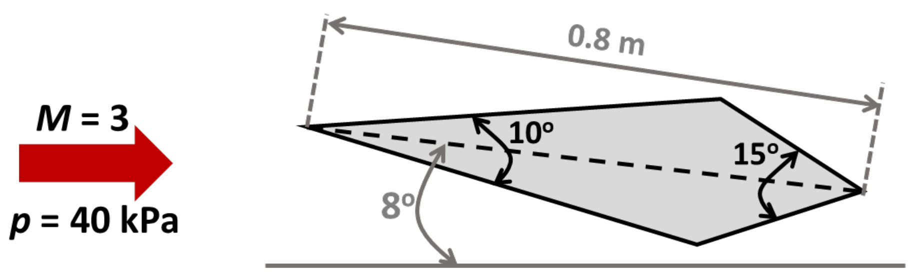
(a) Mostre que o máximo valor possível de ν é

$$\nu_{\max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right)$$

(b) Qual é o número de Mach que corresponde a $\nu_{\max}$ obtido em (a)?
(c) Se γ = 1.4, quais são os ângulos de viragem máximos para escoamentos acelerados com Machs iguais a 1.0, 2.0, 5.0 e 10.0?
(d) Se um escoamento de ar com M = 2.0, p = 100 psia e T = 600°R se expande com o ângulo máximo $\nu_{\max}$, qual é a velocidade correspondente?

Problema 8 **(Expansões P-M em uma Cunha)**

Para o aerofólio em formato de cunha ilustrado a seguir, encontre a sustentação por unidade de comprimento se o número de Mach e a pressão no escoamento livre são respectivamente iguais a 3 e 40 kPa.



Parte II

Problema 9 **(Escoamento Compressível com Atrito I)**

Um escoamento de ar flui em tubo de 0.15 m de diâmetro. Na entrada do conduto o número de Mach é 0.1, a pressão estática é 70 kPa e a temperatura estática é igual a 35°C. Se o escoamento é suposto adiabático e o fator de atrito é 0.02, determine o comprimento do tubo sabendo que o número de Mach na saída deste é 0.6. Encontre também a pressão e a temperatura na saída do tubo.

■ Problema 10 **(Escoamento Compressível com Atrito II)**

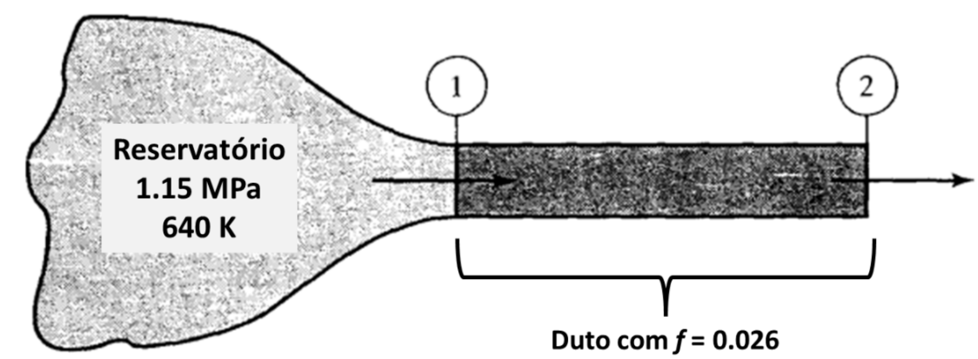
Gás hidrogênio (γ = 1.4, R = 4124 J/kg·K) adentra um duto insulado de área constante com velocidade 2800 m/s, temperatura estática igual a 313 K e pressão de estagnação igual a 540 kPa. O duto tem 2.5 cm de diâmetro e 15 cm de comprimento. Para um fator de atrito f = 0.021, encontre a variação da temperatura e pressão estáticas e a velocidade do H_2 na saída do duto.

■ Problema 11 **(Escoamento Compressível com Atrito III)**

Um escoamento de dióxido de carbono (CO_2, γ = 1.3, R = 189 J/kg·K) gasoso flui em um tubo circular insulado com razão comprimento/diâmetro igual a 50. A velocidade do escoamento e a temperatura estática na entrada do conduto são respectivamente iguais a 195 m/s e 310 K. Sabendo que o escoamento é estrangulado na saída, determine o fator de atrito f.

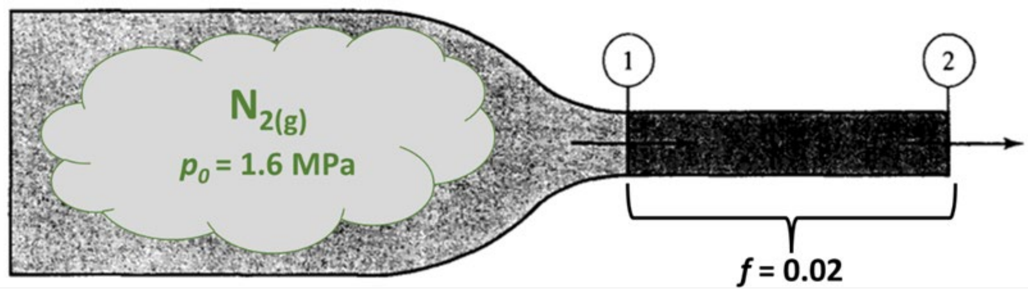
■ Problema 12 **(Vazão Mássica em Escoamento de Fanno)**

Um duto de área constante, com 30 cm de comprimento e 1.5 cm de diâmetro, é conectado a um reservatório de ar por meio de um bocal convergente, como ilustra a figura a seguir. Para pressão e temperatura no reservatório respectivamente iguais a 1.15 MPa e 640 K, determine a vazão mássica ao longo do duto sabendo que a contrapressão é de 101 kPa. Suponha escoamento adiabático no tubo; o fator de atrito é f = 0.026.



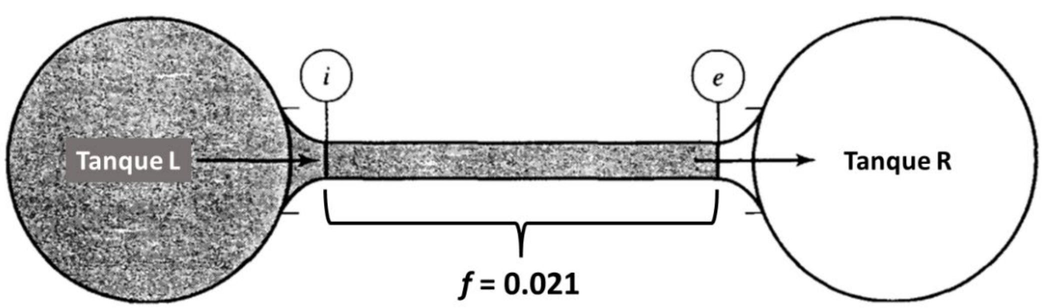
Problema 13 **(Reservatórios e Escoamento de Fanno I)**

Considerando o sistema ilustrado a seguir, encontre o tempo necessário para que a pressão em um tanque de nitrogênio gasoso (γ = 1.4, R = 296.8 J/kg·K) caia de 1.6 MPa para 800 kPa. O volume do tanque é 8 m^3 e a temperatura do tanque é 350 K. Suponha que a temperatura do tanque permanece constante e que o escoamento no tubo 1–2 é adiabático com fator de atrito f = 0.02. O tubo tem 3.2 m de comprimento e 1.6 cm de diâmetro.



Problema 14 **(Reservatórios e Escoamento de Fanno II)**

Um tanque R de 5 m^3 inicialmente vazio deve ser preenchido com ar até atingir pressão interna de 500 kPa. O tanque é conectado a um reservatório L contendo ar sob temperatura e pressão estáticas respectivamente iguais a 4 MPa e 343 K; o volume de L também é 5 m^3. Um tubo de 40 m de comprimento e 2 cm de diâmetro é usado para conectar os dois tanques, como mostra a figura a seguir. Determine o tempo necessário para preencher o tanque R até a pressão desejada de 500 kPa. Suponha escoamento de Fanno com f = 0.021.



Problema 15 (Escoamento de Fanno com Choque Normal I)

Um bocal convergente-divergente tem razão de áreas igual a 3.0. As condições de estagnação no ar que passa pelo plano de entrada do bocal são 150 psia e 550°R. Um duto de área constante com comprimento de 12 diâmetros é acoplado à saída do bocal, como ilustra a figura a seguir. O fator de atrito no duto é 0.025.

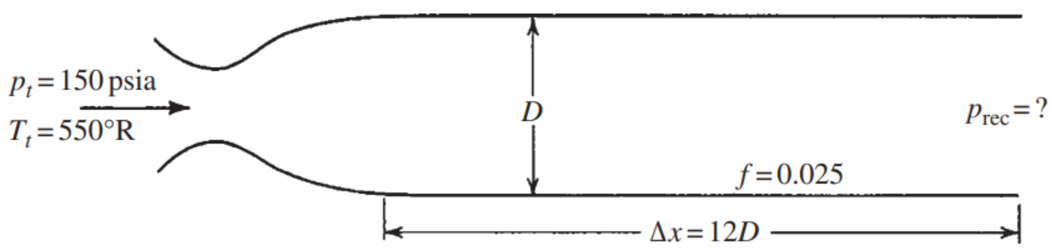
(a) Determine a pressão p_{rec} no receptor ao fim do duto que posicionaria um choque normal

(i) na garganta do bocal;

(ii) na saída do bocal;

(iii) na saída do duto.

(b) Qual pressão no receptor causaria um escoamento supersônico ao longo do duto sem a ocorrência de choques?



Problema 16 (Escoamento de Fanno com Choque Normal II)

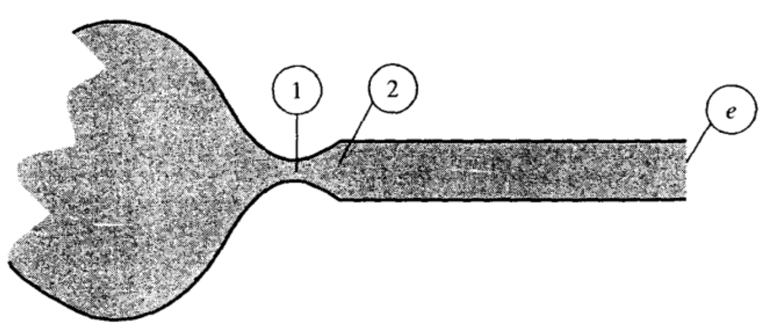
O reservatório de ar (γ = 1.4, R = 0.287 kJ/kg·K) ilustrado à esquerda na figura a seguir tem pressão e temperatura estáticas iguais a 650 kPa e 1000 K, respectivamente. Suponha escoamento isentrópico no bocal convergente-divergente e escoamento de Fanno no duto de área constante, que tem 20 cm de comprimento e 1 cm de diâmetro. A razão de áreas A_2/A_1 no bocal conv.-div. é 2.9. O fator de atrito é f = 0.02.

(a) Encontre a vazão mássica para uma contrapressão de 0 kPa.

(b) Reconsiderando a parte (a), encontre a pressão no plano de saída do duto.

(c) Encontre a contrapressão necessária para que ocorra um choque normal no plano de saída do bocal (estação 2).

(d) Encontre a contrapressão necessária para que ocorra um choque normal logo a jusante da garganta do bocal (estação 1).

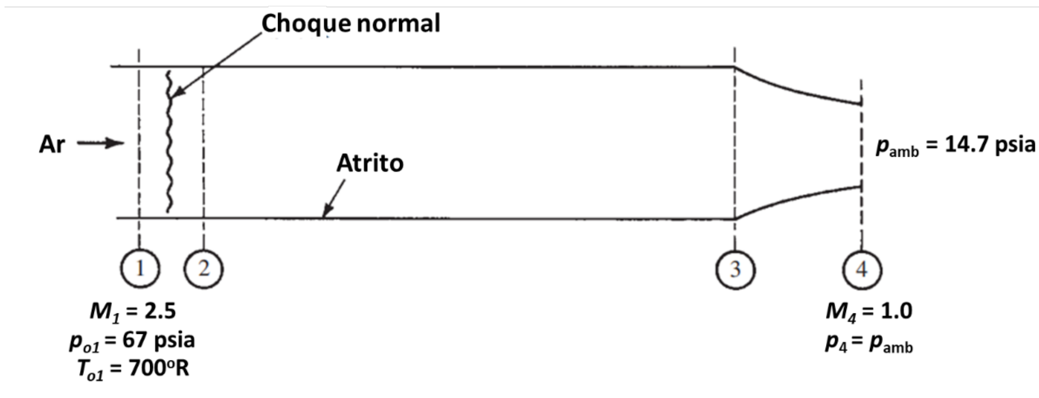


Problema 17 **(Escoamento de Fanno com Choque Normal III)**

As condições a montante de um choque normal são M_1 = 2.5, p_{01} = 67 psia e T_{01} = 700°R. O choque é seguido por um segmento de tubo com escoamento de Fanno, após o qual há um bocal convergente. O sistema completo é ilustrado na figura a seguir. A variação de área é tal que o sistema é estrangulado. Sabe-se também que p_4 = p_{amb} = 14.7 psia.

(a) Encontre os números de Mach M_2 e M_3.

(b) Qual é o valor do comprimento de atrito $f\Delta x/D$ para o duto?



Parte III

Problema 18 **(Taxa de Inserção de Calor I)**

Ar (γ = 1.4, R = 287 J/kg·K) flui com velocidade de 100 m/s, temperatura estática 320 K e pressão estática 200 kPa em um duto de seção constante com diâmetro 1.5 cm. Determine a taxa de inserção de calor necessária para estrangular o duto.

Problema 19 **(Taxa de Inserção de Calor II)**

Um escoamento supersônico de ar com pressão e temperatura de estagnação respectivamente iguais a 750 kPa e 880 K adentra um duto de 8 cm de diâmetro. O escoamento na entrada flui com Mach 2.4. Adiciona-se calor ao sistema por meio de uma reação química no interior do duto. Determine a taxa de transferência de calor necessária para estrangular o duto. Suponha que o ar se comporta como um gás ideal com calores específicos constantes e ignore eventuais alterações na composição do gás devido à reação química supramencionada.

Problema 20 **(Cálculo de Entropia)**

Em um escoamento de ar, tem-se pressão p_1 = 135 kPa, temperatura estática T_1 = 500 K e velocidade V_1 = 540 m/s. O escoamento flui em um duto de seção constante que recebe calor a uma taxa q até atingir a razão de temperaturas de estagnação T_{02}/T_{01} = 0.639.

(a) Obtenha as condições finais M_2, p_2 e T_2.

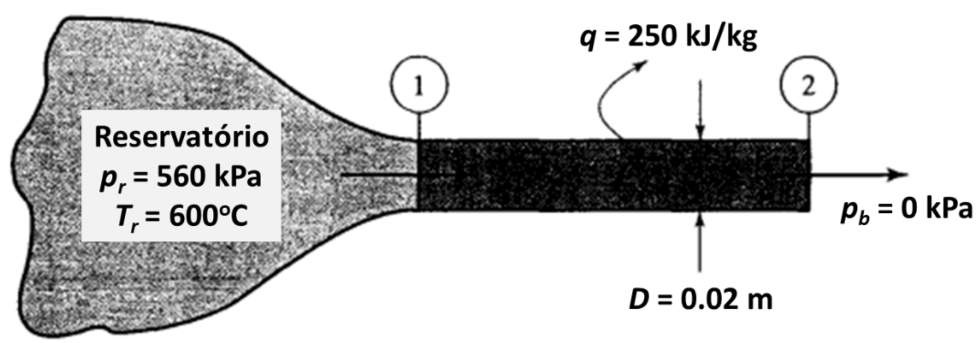
(b) Qual é a variação de entropia do escoamento de ar em foco?

Problema 21 **(Relação Ar-Combustível)**

Ar (γ = 1.4, R = 287 J/kg·K) com temperatura 450 K e pressão 200 kPa adentra a câmara de combustão de uma turbina. A velocidade na entrada da câmara é 42 m/s e a temperatura após combustão é 1100 K. Se o valor calorífico do combustível é 48,000 kJ/kg, determine a relação ar-combustível (em termos de massa). Suponha escoamento de Rayleigh na câmara de combustão. Qual seria a relação ar-combustível necessária para estrangular a câmara de combustão?

Problema 22 **(Escoamento de Rayleigh com Choque Normal)**

Ar flui ao longo de um duto de área constante conectado a um reservatório com temperatura e pressão respectivamente iguais a 600°C e 560 kPa; o duto e o reservatório são ligados por um bocal convergente, como ilustra a figura a seguir. Há uma taxa de perda de calor igual a 250 kJ/kg. **(a)** Determine a pressão de saída, o número de Mach e a vazão mássica para uma contrapressão p_b = 0 kPa. **(b)** Determine a pressão de saída e o número de Mach sabendo que há uma onda de choque normal no plano de saída do duto.



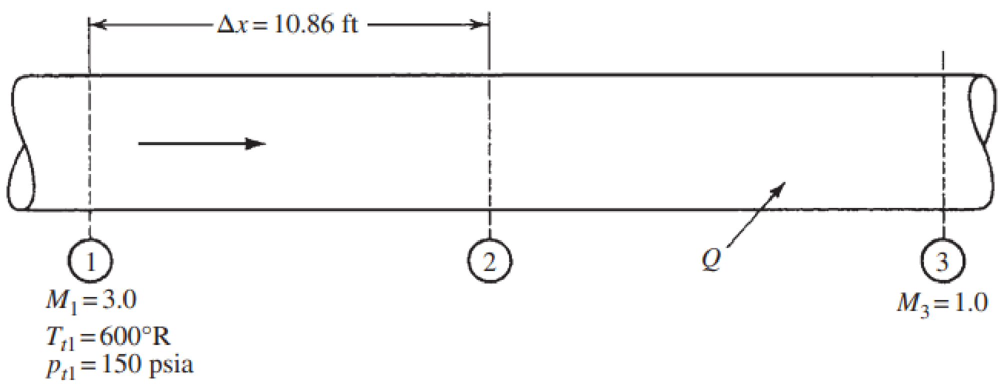
Problema 23 **(Combinação de Escoamentos de Fanno e Rayleigh I)**

O duto de 12 in. de diâmetro ilustrado a seguir possui fator de atrito f = 0.02 e não recebe ou doa calor entre as estações 1 e 2 (isto é, o escoamento é adiabático). Por sua vez, o escoamento entre as estações 2 e 3 é livre de atrito e recebe calor a uma taxa constante Q.

(a) Determine o número de Mach e as propriedades de estagnação na seção 2.

(b) Determine o número de Mach e as propriedades de estagnação na seção 3.

(c) Qual é o valor da taxa de transferência de calor Q? Use c_p = 0.24 Btu/lbm·°R como o calor específico do ar em unidades imperiais.



Problema 24 **(Combinação de Escoamentos de Fanno e Rayleigh II)**

Um escoamento de ar flui em um tubo de parede fina com 5 cm de diâmetro. O tubo será aquecido através de contato entre sua superfície externa e um meio circundante com vapor d'água à temperatura de 160°C. O coeficiente de transferência de calor entre vapor d'água e ar é 140 W/m²·K e o ar que adentra o tubo tem velocidade 30 m/s, pressão 70 kPa e temperatura 5°C. Busca-se aquecer o ar até 65°C. Determine o comprimento de tubo necessário. Supondo escoamento de Rayleigh, calcule a variação de pressão estática atribuída a transferência de calor. Além disso, para as mesmas condições de entrada, calcule a queda de pressão atribuída ao atrito, supondo escoamento de Fanno no duto com f = 0.018. Por fim, forneça a soma das quedas de pressão obtidas com os dois tipos de escoamento.

Soluções

Prob. 1

1. Falso. Designamos com subscritos '1' e '2' as condições a montante e a jusante da expansão P-M, respectivamente. Para escoamento isentrópico, podemos inserir M_1 = 2.0 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e obter o ângulo P-M ν_1 = 26.38º e a razão de pressões p_1/p_o = 0.1278. Tem-se também p_2/p_o = 101/3350 = 0.0301. Inserimos este último resultado no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos M_2 = 2.9333 e ν_2 = 48.45º. Segue que

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\delta \quad \rightarrow \quad \Delta\delta = \nu_2 - \nu_1$$

$$\therefore \Delta\delta = 48.45^{\circ} - 26.38^{\circ} = \boxed{22.07^{\circ}}$$

2. Falso. Primeiramente, determinamos o número de Mach na entrada do tubo (subscrito '1'),

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} = \frac{200}{\sqrt{1.4 \times 4124 \times 303}} = 0.151$$

Entrando com esse Mach na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS, lemos fL/D = 27.524. Segue que o comprimento de tubo necessário para estrangular o escoamento é

$$\frac{fL}{D} = 27.524 \quad \rightarrow \quad L = \frac{27.524D}{f}$$

$$\therefore L = \frac{27.524 \times 0.025}{0.12} = \boxed{5.73 \text{ m}}$$

3. Falso. Primeiramente, utilizamos a equação da energia para obter a temperatura estática T_1,

$$T_1 = T_o - \frac{V_1^2}{2c_p} = 380 - \frac{90^2}{2 \times 1005} = 376.0 \text{ K}$$

A velocidade do som a_1 na entrada do tubo é

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 376.0} = 388.7 \text{ m/s}$$

O número de Mach na entrada do tubo é $M_1 = V_1/a_1$ = 90/388.7 = 0.232. Inserimos esse valor na calculadora de escoamentos de Fanno e lemos fL_{max}/D = 10.199. Resolvendo para o diâmetro D, vem

$$\frac{fL}{D} = 10.199 \quad \rightarrow \quad D = \frac{fL}{10.199}$$

$$\therefore D = \frac{0.08 \times 55}{10.199} = \boxed{0.431 \text{ m}}$$

4. Verdadeiro. Sendo *Pr* = 0.7 o número de Prandtl do ar, podemos obter o fator de recuperação *r*,

$$r = \text{Pr}^{1/3} = 0.7^{1/3} = 0.888$$

Em seguida, sabendo que γ = 1.4, obtemos a razão de temperaturas

$$\frac{T_{sad}}{T_\infty} = 1 + r\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)M^2 = 1 + 0.888 \times \left(\frac{1.4 - 1}{2}\right) \times 4^2 = 3.842$$

onde T_{sad} é a temperatura na superfície da placa plana, a qual é considerada adiabática. Resolvendo para T_{sad},

$$\frac{T_{sad}}{T_\infty} = 3.842 \quad \rightarrow \quad T_{sad} = 3.842 T_\infty$$

$$\therefore T_{sad} = 3.842 \times 203 = 779.9 \, \text{K}$$

Sendo a placa mantida à temperatura de 303 K, a taxa média de transferência de calor entre a superfície da placa e o ar circundante é dada pela seguinte equação, onde *A* é a área superficial de um dos lados da placa,

$$\dot{q} = \overline{h} \times 2A \times \left(T_v - T_{\text{sad}}\right) = 1000 \times 2 \times \left(0.8 \times 1.2\right) \times \left(303 - 779.9\right) = -915,650 \text{ W}$$

$$\therefore \boxed{\left|\dot{q}\right| = 915.7 \text{ kW}}$$

O sinal negativo indica que o calor está sendo transferido do ar para a placa, e não o contrário. O valor absoluto de $\dot{q}$ é aproximadamente igual a 916 kW.

5. Verdadeiro. Denotamos as condições na entrada e saída do duto com os subscritos '1' e '2', respectivamente. O número de Mach M_1 na entrada do duto é

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} = \frac{150}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 393}} = 0.3775$$

Entramos com esse número de Mach no webapp de escoamentos compressíveis do *engineering.com* e extraímos a razão de temperaturas T_1/T_{o1} = 0.9723. Usamos esse resultado para determinar a temperatura de estagnação T_{o1},

$$\frac{T_1}{T_{o1}} = 0.9723 \quad \rightarrow \quad T_{o1} = \frac{T_1}{0.9723}$$

$$\therefore T_{o1} = \frac{393}{0.9723} = 404.2 \text{ K}$$

Em seguida, inserimos M_1 = 0.3775 na calculadora de escoamentos de Rayleigh do PDAS e lemos

$$\frac{T_{o1}}{T_o^*} = 0.4890$$

Sabe-se que a máxima taxa de transferência de calor ocorre quando o escoamento é estrangulado na saída, ou seja, M_2 = 1 e

$$T_{o2} = T_o^*$$

$$T_{o2} = T_o^* = \left(\frac{T_o^*}{T_{o1}}\right) T_{o1} = \frac{1}{0.4890} \times 404.2 = 826.6 \text{ K}$$

Portanto, a quantidade máxima de calor transferido por unidade de massa de ar é dada por

$$q = c_p\left(T_{o2} - T_{o1}\right) = 1.005 \times \left(826.6 - 404.2\right) = \boxed{424.5 \text{ kJ/kg}}$$

■ Prob. 2

Parte (a): Lembre-se que o ângulo subtendido entre a direção do escoamento e a expansão de Prandtl-Meyer é igual ao ângulo de Mach μ. No presente caso, temos, a montante da expansão,

$$\mu_1 = 180^{\circ} - 142.7^{\circ} = 37.3^{\circ}$$

Inserindo esse ângulo de Mach no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com*, lê-se M_1 = 1.6502. A jusante da expansão, é fácil ver que μ_2 = 19.2°. Inserindo esse ângulo no webapp supracitado, obtemos M_2 = 3.0407.

Parte (b): Entrando M_1 = 1.6502 e M_2 = 3.0407 no webapp de escoamentos isentrópicos, extraímos, respectivamente, os ângulos P-M ν_1 = 16.34° e ν_2 = 50.54°. Segue que o ângulo de virarem é $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ = 50.54° – 16.34° = 34.2°. Busca-se também o ângulo α_3 do leque de expansão, que é dado por

$$180^{\circ} + \Delta\nu = \alpha_1 + \alpha_3 + \mu_2$$

$$\therefore \alpha_3 = \underbrace{180^{\circ} - \alpha_1}_{=\mu_1} - \mu_2 + \Delta\nu$$

$$\therefore \alpha_3 = \left(\mu_1 - \mu_2\right) + \left(\nu_2 - \nu_1\right)$$

$$\therefore \alpha_3 = \left(37.3^{\circ} - 19.2^{\circ}\right) + 34.2^{\circ} = \boxed{52.3^{\circ}}$$

■ Prob. 3

Inserindo M_1 = 2.54 no webapp de escoamentos isentrópicos, lemos o ângulo ν_1 = 40.05° a razão de temperaturas T_1/T_{o1} = 0.4366. Usamos esse resultado para computar a temperatura de estagnação T_{o1},

$$T_{o1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1}\right)T_1 = \frac{1}{0.4366} \times 850 = 1947^\circ\,\mathrm{R} = T_{o2}$$

Podemos prosseguir e determinar a temperatura estática T_1; para tanto, é importante incluir o fator de conversão J = 778 ft-lbf/Btu,

$$T_2 = T_{o2} - \frac{V_2^2}{2gJc_p} = 1947 - \frac{4000^2}{2\times 32.2\times 778\times 0.248} = 659.3^\circ\,\mathrm{R}$$

Em seguida, calculamos a razão de temperaturas T_2/T_{o2} = 659.3/1947 = 0.3386 e a inserimos no webapp de escoamentos isentrópicos para ler o número de Mach M_2 = 3.125 e o ângulo ν_2 = 52.11°. Resta apenas obter o ângulo de viragem $\Delta\nu$,

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 52.11^\circ - 40.05^\circ = \boxed{12.06^\circ}$$

■ Prob. 4

Inserimos M_1 = 2.3 e δ = 12° no webapp de choques oblíquos do *engineering.com* e extraímos o número de Mach normal M_{1n} = 1.3634 e o ângulo de onda θ = 36.35°. Em seguida, entramos com esse Mach no webapp de choques normais e lemos o Mach M_{2n} = 0.7556 e a razão de temperaturas T_2/T_1 = 1.2312. Segue que o número de Mach M_2 é

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\theta - \delta)} = \frac{0.7556}{\sin(36.35^\circ - 12^\circ)} = \boxed{1.8326}$$

ao passo que a temperatura estática T_2 é

$$T_2 = 1.2312 \times 300 = \boxed{369.4\ \mathrm{K}}$$

Inserimos M_2 = 1.8326 no webapp de escoamentos isentrópicos e extraímos o ângulo de Prandtl-Meyer ν_2 = 21.66° e a razão de temperaturas T_2/T_{o2} = 0.598. Tem-se ainda $|\delta|$ = 24°; portanto,

$$\nu_3 = \nu_2 + |\delta| = 21 + 24 = 45^\circ$$

Inserimos esse ângulo *P-M* no webapp de escoamentos isentrópicos e obtemos

$$\boxed{M_3 = 2.7645} \quad ; \quad \frac{T_3}{T_{o2}} = 0.3955$$

A temperatura estática T_3 é então

$$\frac{T_3}{T_2}=\left(\frac{T_3}{T_{o2}}\right)\left(\frac{T_{o2}}{T_2}\right)=0.3955\times\frac{1}{0.598}=0.6614$$

$$\therefore T_3=0.6614\times T_2=0.6614\times 369.4=\boxed{244.3\text{ K}}$$

Para M_3 = 2.7645 e δ = 12°, o webapp de choques oblíquos fornece o ângulo de onda θ = 31.14° e o Mach normal M_{3n} = 1.4296. Entramos com esse Mach no webapp de choques normais e extraímos M_{4n} = 0.7276 e T_4/T_3 = 1.2739.

$$M_4=\frac{M_{4n}}{\sin(\theta-\delta)}=\frac{0.7276}{\sin(31.14^\circ-12^\circ)}=\boxed{2.219}$$

Resta apenas determinar a temperatura T_4,

$$T_4=1.2739T_3=1.2739\times 244.3=\boxed{311.2\text{ K}}$$

■ Prob. 5

Parte (a): Primeiramente, inserimos o número de Mach M_1 = 3 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e extraímos a razão de pressões p_2/p_{o2} = 0.0272 e o ângulo P-M ν_1 = 49.76°. Em seguida, observa-se que a região 2 é alcançada após uma expansão de Prandtl-Meyer que curva o escoamento em 10° para fora. Portanto, ν_2 = ν_1 + 10° = 49.76° + 10° = 59.76°. Entramos com esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos M_2 = 3.5785 e p_2/p_{o2} = 0.0117. A região 3 é alcançada após o escoamento atravessar um choque oblíquo no qual sua trajetória curva-se em 10°. Segue que, usando o webapp de choques oblíquos,

$$M_3=2.9654\quad;\quad\frac{p_3}{p_2}=2.3050\quad;\quad\frac{p_{o3}}{p_{o2}}=0.9432$$

$$\frac{p_{o3}}{p_{o1}}=\left(\frac{p_{o3}}{p_{o2}}\right)\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)=0.9433\times 1=0.9433$$

Por fim, a pressão p_3 que buscamos é

$$p_3=\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_{o2}}\right)\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)\left(\frac{p_{o1}}{p_1}\right)p_1$$

$$\therefore p_3=2.3050\times 0.0117\times 1\times\frac{1}{0.0272}\times 100=\boxed{99.15\text{ kPa}}$$

Parte (b): A região 2 é alcançada após o escoamento atravessar um choque oblíquo no qual o este é curvado em 10º. Recorrendo ao webapp de escoamentos isentrópicos com M_1 = 3 e δ = 10º, lemos M_2 = 2.5050, p_2/p_1 = 2.0545 e p_{o2}/p_{o1} = 0.9631. Em seguida, entramos com M_2 = 2.5050 no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos p_2/p_{o2} = 0.0581 e ν_2 = 39.24º. Prosseguindo, observa-se que a região 3 é alcançada após uma expansão de Prandtl-Meyer que curva o escoamento em 10º para fora. Portanto, $\nu_3 = \nu_2$ + 10º = 39.24º + 10º = 49.24º. Entramos com esse ângulo P-M no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos M_3 = 2.9733 e p_3/p_{o3} = 0.0283. Resta apenas obter a pressão p_3,

$$p_3 = \left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right)\left(\frac{p_{o3}}{p_{o2}}\right)\left(\frac{p_{o2}}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)p_1$$

$$\therefore p_3 = 0.0283 \times 1 \times \frac{1}{0.0581} \times 2.0545 \times 100 = \boxed{100.07 \text{ kPa}}$$

Observe que tanto a configuração analisada em (a) quanto aquela analisada em (b) resultam em pressões p_3 muito próximas da pressão inicial p_1 = 100 kPa**;** no entanto, os valores finais não são os mesmos, o que indica que a ordem dos choques e expansões produz alterações expressivas no resultado final.

■ Prob. 6

Parte (a): O ângulo de onda θ é igual a 42º ou 180º – 42º = 138º. Inserimos o número de Mach no escoamento livre, M_1 = 2, no webapp de choques oblíquos do *engineering.com* e extraímos o ângulo de ataque δ = 12.36º.

Parte (b): A componente normal do ângulo de Mach do escoamento livre é $M_n = M_1 sin(\theta)$ = 2 × sin(42º) = 1.3383. Podemos utilizar esse valor para calcular a razão de pressões p_2/p_1**,**

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2\theta}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2\gamma M_n^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2\times 1.4 \times 1.3383^2}{1.4+1} - \frac{1.4-1}{1.4+1} = 1.9229$$

$$\therefore p_2 = 1.9229 \times 50 = \boxed{96.15 \text{ kPa}}$$

Parte (c): Primeiramente, inserimos M_1 = 2 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e extraímos o ângulo P-M ν_1 = 26.38º. Sabendo que o escoamento no topo da placa deve curvar-se na mesma quantidade que o escoamento na superfície inferior, escrevemos $\nu_3 = \nu_1 + \delta_{1-2}$ = 26.38° + 12.36° = 38.74°. Inserindo esse ângulo P-M na calculadora de escoamentos isentrópicos, lemos o número de Mach M_3 = 2.4836 e a razão de pressões p_3/p_{o3} = 0.0600. Note, também, que podemos inserir M_1 = 2 no webapp de escoamentos isentrópicos e ler p_1/p_{o1} = 0.1278, ou

$$\frac{p_1}{p_{o1}} = \frac{p_\infty}{p_{o1}} = 0.1278$$

Resta apenas obter a razão de pressões p_3/p_∞,

$$\frac{p_3}{p_\infty} = \left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right)\left(\frac{p_{o1}}{p_\infty}\right) = 0.0600 \times \frac{1}{0.1278} = 0.4695$$

$$\therefore\ p_3 = 0.4695\, p_\infty = 0.4695 \times 50 = \boxed{23.48\ \text{kPa}}$$

■ Prob. 7

Partes (a) e (b): A função de Prandtl-Meyer $\nu(M)$ cresce monotonicamente com M; logo, podemos fazer $M \to \infty$ e obter, observando que *arctan*(∞) → π/2,

$$\nu = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2} \underbrace{\tan^{-1}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\infty^2 - 1\right)\right]^{1/2}}_{\to \pi/2} - \underbrace{\tan^{-1}\left[\sqrt{\infty^2 - 1}\right]}_{\to \pi/2}$$

$$\therefore\ \nu = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{\nu_{\max} = \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right]}$$

Embora conveniente, essa dedução é bastante rudimentar; melhor seria diferenciar $\nu(M)$ com relação a M, igualar a expressão obtida a zero e resolver para M_{opt}. Poderíamos então substituir M_{opt} em $\nu(M)$ e obter a expressão acima. Como um passo adicional, pode-se diferenciar uma segunda vez, substituir $M_{\text{opt}} \to \infty$ e verificar que o sinal da segunda derivada é negativo, indicando que o resultado obtido de fato constitui um *máximo* da função de Prandtl-Meyer.

Parte (c): Com γ = 1.4, o valor de $\nu_{\max}$ é

$$\nu_{\max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{1.4+1}{1.4-1}} - 1\right) = 2.277\ \text{rad} = 130.46^\circ$$

Com M = 1.0, tem-se

$$\Delta\nu_{\max}\big|_{M=1} = 130.46^{\circ} - \nu(M = 1.0)$$

$$\therefore \Delta\nu_{\max}\big|_{M=1} = 130.46^{\circ} - 0^{\circ} = \boxed{130.46^{\circ}}$$

Com M = 2.0, tem-se

$$\Delta\nu_{\max}\big|_{M=2} = 130.46^{\circ} - \nu(M = 2.0)$$

$$\therefore \Delta\nu_{\max}\big|_{M=2} = 130.46^{\circ} - 26.38^{\circ} = \boxed{104.08^{\circ}}$$

Com M = 5.0, tem-se

$$\Delta\nu_{\max}\big|_{M=5} = 130.46^{\circ} - \nu(M = 5.0)$$

$$\therefore \Delta\nu_{\max}\big|_{M=5} = 130.46^{\circ} - 76.92^{\circ} = \boxed{53.54^{\circ}}$$

Com M = 10.0, tem-se

$$\Delta\nu_{\max}\big|_{M=10} = 130.46^{\circ} - \nu(M = 10.0)$$

$$\therefore \Delta\nu_{\max}\big|_{M=10} = 130.46^{\circ} - 102.32^{\circ} = \boxed{28.14^{\circ}}$$

Observe que, quanto maior for o número de Mach a montante, menor será o ângulo de viragem máximo $\Delta\nu_{\max}$.

Parte (d): Com o escoamento de ar se expandindo sob ângulo de viragem máximo (isto é, tal que $M_2 \to \infty$), podemos supor que toda a energia do escoamento é convertida em energia cinética. Assim sendo, inserimos M_1 = 2.0 no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos a razão de temperaturas T_1/T_{o1} = 0.5556**;** logo,

$$T_{o1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1}\right)T_1 = \frac{1}{0.5556} \times 600 = 1080^{\circ}\,\mathrm{R}$$

e a velocidade V_2 torna-se (não se esqueça do fator de conversão J = 778 ft-lbf/Btu)

$$c_p T_{o1} = \cancel{c_p T_2} + \frac{V_2^2}{2Jg} \quad \rightarrow \quad c_p T_{o1} = \frac{V_2^2}{2Jg}$$

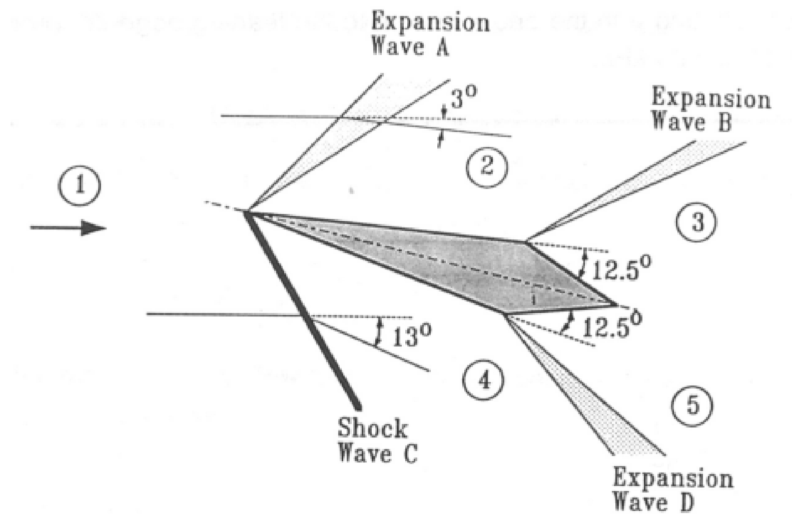
$$\therefore V_2^2 = 2Jgc_p T_{o1}$$

$$\therefore V_2 = \sqrt{2Jgc_p T_{o1}}$$

$$\therefore V_2 = \sqrt{2 \times 778 \times 32.2 \times 0.24 \times 1080} = \boxed{3604 \text{ ft/sec}}$$

■ Prob. 8

A ilustração a seguir mostra as ondas e expansões que ocorrem na cunha.



O primeiro passo é estabelecer os ângulos de viragem associados a cada choque e expansão:

- Expansão de Prandtl-Meyer A (entre regiões 1 e 2): Ângulo de viragem = 3°
- Expansão de Prandtl-Meyer B (entre regiões 2 e 3): Ângulo de viragem = 12.5°
- Choque oblíquo C (entre regiões 1 e 4): Ângulo de viragem = 13°
- Expansão de Prandtl-Meyer D (entre regiões 4 e 5): Ângulo de viragem = 12.5°

Considere a superfície superior do aerofólio. A expansão *A* separa as regiões 1 e 2. A montante da onda, isto é, na região 1, onde o número de Mach do escoamento é M_1 = 3, podemos recorrer ao webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e ler

$$\nu_1 = 49.76^\circ \quad ; \quad \frac{p_1}{p_{o1}} = 0.0272$$

Sabendo que o escoamento curva-se em 3° ao longo da expansão, tem-se $\nu_2 = \nu_1 +$ 3° = 49.76° + 3° = 52.76°. Entramos com esse ângulo P-M no webapp de escoamentos isentrópicos e extraímos

$$M_2 = 3.1605 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_{o2}} = 0.0214$$

Lembrando que o escoamento ao longo da expansão é tal que $p_{o2} = p_{o1}$ (consequência do caráter isentrópico do leque de Prandtl-Meyer), tem-se

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_{o2}}\right)\left(\frac{p_{o1}}{p_1}\right)p_1 = 0.0214 \times \frac{1}{0.0272} \times 40 = 31.47 \text{ kPa}$$

Em seguida, considere a expansão *B*, que separa as regiões 2 e 3. Sabendo que o escoamento é curvado em um ângulo de 12.5° e que ν_2 = 52.76°, tem-se $\nu_3 = \nu_2$ + 12.5° = 52.76° + 12.5° = 65.26°. Entramos com esse ângulo P-M no webapp de escoamentos isentrópicos e extraímos

$$M_3 = 3.9606 \quad ; \quad \frac{p_3}{p_{o3}} = 0.0069$$

Lembrando, novamente, que $p_{o3} = p_{o2}$ devido ao caráter isentrópico da onda, escrevemos

$$p_3 = \left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right)\left(\frac{p_{o3}}{p_2}\right)p_2 = 0.0069 \times \frac{1}{0.0214} \times 31.47 = 10.15 \text{ kPa}$$

Considere agora o escoamento na superfície inferior do aerofólio. Uma onda de choque *C* separa as regiões 1 e 4. A montante da onda, isto é, na região 1, onde o número de Mach M_1 é igual a 3 e a onda faz o escoamento curvar-se em 13°, recorremos ao webapp de choques oblíquos e obtemos

$$M_4 = 2.3560 \quad ; \quad \frac{p_4}{p_1} = 2.4937$$

Segue que

$$p_4 = \left(\frac{p_4}{p_1}\right)p_1 = 2.4937 \times 40 = 99.75 \text{ kPa}$$

Segue que, entrando com M_4 no webapp de escoamentos isentrópicos,

$$\nu_4 = 35.67^{\circ} \quad ; \quad \frac{p_4}{p_{o4}} = 0.0733$$

Considere agora a expansão D, que separa as regiões 4 e 5. Sabendo que o escoamento é curvado em um ângulo de 12.5° e que ν_4 = 35.67°, tem-se $\nu_5 = \nu_4$ + 12.5° = 35.67° + 12.5° = 48.17°. Para esse valor de ν_5, o webapp de escoamentos isentrópicos fornece

$$M_5 = 2.9190 \quad ; \quad \frac{p_5}{p_{o5}} = 0.0308$$

Lembrando novamente que o escoamento ao longo da expansão é tal que $p_{o5} = p_{o4}$, tem-se

$$p_5 = \left(\frac{p_5}{p_{o5}}\right)\left(\frac{p_{o4}}{p_4}\right)p_4 = 0.0308 \times \frac{1}{0.0733} \times 99.75 = 41.91 \text{ kPa}$$

Em suma, temos as pressões

$$p_2 = 31.47 \text{ kPa} \ ; \ p_3 = 10.15 \text{ kPa} \ ; \ p_4 = 99.75 \text{ kPa} \ ; \ p_5 = 41.91 \text{ kPa}$$

A distância *L* entre o canto e o bordo de ataque, mensurada ao longo da corda média do aerofólio, é dada por

$$L\sin(5^{\circ}) = (0.8 - L)\sin(7.5^{\circ}) \quad \rightarrow \quad L\sin(5^{\circ}) = 0.8\sin(7.5^{\circ}) - L\sin(7.5^{\circ})$$

$$\therefore L\left[\sin(5^{\circ}) + \sin(7.5^{\circ})\right] = 0.8\sin(7.5^{\circ})$$

$$\therefore L = \frac{0.8\sin(7.5^{\circ})}{\sin(5^{\circ}) + \sin(7.5^{\circ})} = 0.480 \text{ m}$$

Portanto, a força *F* por unidade de envergadura que atua perpendicularmente à linha central do aerofólio é

$$F = (99.75 - 31.47) \times 0.481 + (41.91 - 10.15) \times (0.8 - 0.481) = 42.97 \text{ kN}$$

A sustentação e arrasto são respectivamente iguais a

$$\text{Sust.} = F \times \cos(8^{\circ}) = 42.97 \times \cos(8^{\circ}) = \boxed{42.55 \text{ kN}}$$
$$\text{Arrst.} = F \times \sin(8^{\circ}) = 42.97 \times \sin(8^{\circ}) = 5.98 \text{ kN}$$

Concluímos que a sustentação por unidade de envergadura é aproximadamente igual a 42.6 kN.

■ Prob. 9

Denotamos as condições na entrada e saída do tubo com os subscritos '1' e '2', respectivamente. Entrando com M_1 = 0.1 na calculadora de escoamentos de Fanno, temos

$$\frac{p_1}{p^*} = 10.940 \quad ; \quad \frac{T_1}{T^*} = 1.1976 \quad ; \quad \frac{fL_1}{D} = 66.922$$

Analogamente, inserimos M_2 = 0.6 na calculadora para obter

$$\frac{p_2}{p^*} = 1.7634 \quad ; \quad \frac{T_2}{T^*} = 1.1194 \quad ; \quad \frac{fL_2}{D} = 0.4908$$

Subtraímos $(fL/D)_2$ de $(fL/D)_1$ para obter

$$\frac{fL_{1-2}}{D}=\frac{fL_1}{D}-\frac{fL_2}{D}=66.922-0.4908=66.431$$

Resolvendo para $L_{1\text{-}2}$,

$$\frac{fL_{1-2}}{D}=66.431 \quad\rightarrow\quad L_{1-2}=\frac{66.431D}{f}$$

$$\therefore L_{1-2}=\frac{66.431\times 0.15}{0.02}=\boxed{498.2\text{ m}}$$

Portanto, o tubo tem cerca de 498 metros de comprimento. Para calcular a pressão estática p_2 na saída do tubo, escrevemos

$$p_2=\frac{\left(p_2/p^*\right)}{\left(p_1/p^*\right)}p_1=\frac{1.7634}{10.940}\times 70=\boxed{11.28\text{ kPa}}$$

Analogamente, a temperatura estática T_2 é

$$T_2=\frac{\left(T_2/T^*\right)}{\left(T_1/T^*\right)}T_1=\frac{1.1194}{1.1976}\times 308=\boxed{287.9\text{ K}}$$

■ Prob. 10

O primeiro passo é calcular o número de Mach na entrada do duto,

$$M_1=\frac{V_1}{a_1}=\frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}}=\frac{2800}{\sqrt{1.4\times 4124\times 313}}=2.083$$

Inserindo esse valor de M como entrada na calculadora do PDAS, obtemos as seguintes informações:

$$\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1=0.3291 \quad ; \quad \frac{p_1}{p^*}=0.3848$$

$$\frac{\rho_1}{\rho^*}=\frac{V^*}{V_1}=0.5989 \quad ; \quad \frac{T_1}{T^*}=0.6425$$

Podemos também inserir M_1 no webapp de escoamentos isentrópicos e ler p_1/p_{01} = 0.2126. Prosseguimos ao cálculo de fL_{max}/D na estação 2,

$$\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_2=\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1-\frac{fL}{D}$$

$$\therefore\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_2=0.3291-\frac{0.021\times 15}{2.5}=0.203$$

O número de Mach do escoamento na estação 2 é aquele que satisfaz fL_{max}/D = 0.203, ou seja, M_2 = 1.6882. Temos ainda

$$\frac{p_2}{p^*} = 0.5187 \quad ; \quad \frac{\rho_2}{\rho^*} = \frac{V^*}{V_2} = 0.6780 \quad ; \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.7650$$

Podemos agora calcular a razão de pressões estáticas p_2/p_1,

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_1}\right) = 0.5187 \times \frac{1}{0.3848} = 1.348$$

e a razão de temperaturas estáticas T_2/T_1,

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_2}{T^*}\right)\left(\frac{T^*}{T_1}\right) = 0.7650 \times \frac{1}{0.6425} = 1.191$$

A velocidade V_2 é então

$$V_2 = \left(\frac{V_2}{V^*}\right)\left(\frac{V^*}{V_1}\right)V_1 = \frac{1}{0.6780} \times 0.5989 \times 2800 = \boxed{2473 \text{ m/s}}$$

e a diferença de pressões $p_2 - p_1$ é

$$p_2 - p_1 = p_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = \frac{p_1}{p_{o1}} p_{o1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$$

$$\therefore p_2 - p_1 = 0.2126 \times 540 \times (1.348 - 1) = \boxed{39.95 \text{ kPa}}$$

Por fim, a diferença de temperaturas $T_2 - T_1$ é

$$T_2 - T_1 = T_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 313 \times (1.191 - 1) = \boxed{59.78 \text{ K}}$$

■ Prob. 11

Primeiramente, determinamos a velocidade do som,

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.3 \times 189 \times 310} = 276.0 \text{ m/s}$$

e em seguida o número de Mach correspondente à velocidade V_1 = 195 m/s,

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{195}{276.0} = 0.7065$$

Inserindo γ = 1.3 e M_1 = 0.7065 na calculadora de escoamentos de Fanno, lê-se o comprimento de atrito fL_{max}/D = 0.2170. Resolvendo para o fator de atrito f, vem

$$\frac{fL_{\max}}{D} = 0.2170 \quad \rightarrow \quad f = \frac{0.2170D}{L_{\max}}$$

$$\therefore f = \frac{0.2170}{\left(L_{\max}/D\right)}$$

$$\therefore f = \frac{0.2170}{50} = \boxed{0.0043}$$

■ Prob. 12

Primeiramente, determinamos a pressão de saída supondo que o duto é estrangulado. O parâmetro *fL/D* é

$$\frac{fL}{D} = \frac{0.026 \times 30}{1.5} = 0.520 = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 - \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_2$$

$$\therefore 0.520 = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 - 0$$

$$\therefore \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 = 0.520$$

Inserindo esse parâmetro na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS, lê-se o número de Mach M_1 = 0.5928. Temos também a razão de pressões p_1/p^* = 1.8407. Entrando com M_1 = 0.5928 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com*, tem-se p_1/p_{o1} = 0.7884. A pressão na saída (estação 2) é então

$$p_e = p_2 = p^* = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_{o1}}\right)p_{o1} = \frac{1}{1.8407} \times 0.7884 \times 1150 = 492.6 \text{ kPa}$$

Uma vez que a contrapressão (= 101 kPa) está folgadamente abaixo desse valor, é válida a hipótese de que o duto é estrangulado; podemos prosseguir e determinar a vazão mássica $\dot{m}$. Entrando com M_1 = 0.5928 no webapp de escoamentos isentrópicos, lemos p_1/p_{o1} = 0.7884 (que já foi utilizado uma vez acima) e T_1/T_{o1} = 0.9343. Segue que

$$T_1 = \left(\frac{T_1}{T_{o1}}\right)T_{o1} = 0.9343 \times 640 = 598.0 \text{ K}$$

$$p_1 = \left(\frac{p_1}{p_{o1}}\right)p_{o1} = 0.7884 \times 1150 = 906.7 \text{ kPa}$$

A densidade do ar na estação 1 é

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{\left(906.7\times 10^3\right)}{287\times 598.0} = 5.283\ \text{kg/m}^3$$

e a velocidade de escoamento é

$$V_1 = M_1\sqrt{\gamma RT_1} = 0.5928\times\sqrt{1.4\times 287\times 598.0} = 290.6\ \text{m/s}$$

Por fim, a vazão mássica que buscamos é

$$\dot{m} = \rho_1 A V_1 = 5.283\times\left(\frac{\pi\times 0.015^2}{4}\right)\times 290.6 = \boxed{0.271\ \text{kg/s}}$$

■ Prob. 13

Primeiramente, busca-se a pressão de saída supondo que o duto é entrangulado. Fazendo $(fL_{max}/D)_2 = 0$, temos

$$\frac{fL}{D} = \frac{0.02\times 3.2}{0.016} = 4.0 = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 - \underbrace{\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_2}_{=0}$$

$$\therefore 4.0 = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 - 0$$

$$\therefore \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 = 4.0$$

Inserindo esse parâmetro na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS, extraímos o número de Mach M_1 = 0.3324 e a razão de pressões p_1/p^* = 3.2598. Entrando com M_1 = 0.3324 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com*, lê-se p_1/p_{o1} =0.9264. Denotando como $p_r(t)$ a pressão no reservatório em um instante de tempo *t*, podemos escrever

$$p_2 = p^* = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_{o1}}\right)\left(\frac{p_{o1}}{p_r}\right)p_r = \frac{1}{3.2598}\times 0.9264\times 1.0\times p_r(t)$$

$$\therefore p_2 = 0.2842\,p_r(t)\quad [\text{kPa}]$$

O menor valor para a pressão de reservatório no sistema em questão é 800 kPa. Portanto, o menor valor de p^* é 0.2842 × 800 = 227.4 kPa; como esse valor é maior que a contrapressão p_b = 101 kPa, o duto estará estrangulado durante todo o processo de redução de pressão interna. Prosseguindo, inserimos M_1 = 0.3324 no webapp de escoamentos isentrópicos e obtemos T_1/T_{o1} = 0.9784 e p_1/p_{o1} = 0.9264.

Utilizamos esses valores para computar a temperatura e pressão estáticas na estação 1,

$$T_1 = \left(\frac{T_1}{T_{o1}}\right) T_{o1} = 0.9784 \times 350 = 342.4 \text{ K}$$

$$p_1 = \left(\frac{p_1}{p_{o1}}\right) p_{o1} = 0.9264 p_r$$

A densidade ρ_1 é calculada com a equação dos gases ideais,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0.9264 p_r \times 10^3}{296.8 \times 342.4} = 0.00912 p_r$$

A velocidade V_1 é

$$V_1 = M_1 \sqrt{\gamma R T_1} = 0.3324 \times \sqrt{1.4 \times 296.8 \times 342.4} = 125.4 \text{ m/s}$$

Segue que a vazão mássica $\dot{m}$ é tal que

$$\dot{m} = \rho_1 A V_1 = 0.00912 p_r \times \left(\frac{\pi}{4} \times 0.016^2\right) \times 125.4$$

$$\therefore \dot{m} = 2.30 \times 10^{-4} p_r \quad \textbf{(I)}$$

No interior do reservatório, a conservação de massa nos permite escrever

$$p_r \forall_r = m_r R T$$

onde $\forall_r$ denota o volume do reservatório. Isolando a pressão de reservatório p_r e diferenciando com relação ao tempo,

$$p_r \forall_r = m_r R T \quad \rightarrow \quad p_r = \frac{RT}{\forall_r} m_r$$

$$\therefore \frac{dp_r}{dt} = \frac{RT}{\forall_r} \frac{dm_r}{dt}$$

$$\therefore \frac{dp_r}{dt} = \frac{0.2968 \times 350}{8} \frac{dm_r}{dt}$$

$$\therefore \frac{dp_r}{dt} = 12.99 \frac{dm_r}{dt}$$

Aplicando um balanço de massa no reservatório, tem-se $dm_r/dt = -\dot{m}$, com $\dot{m}$ definido por **(I)**; portanto,

$$\frac{dp_r}{dt} = 12.99 \times \frac{dm_r}{dt} = 12.99 \times \left(-2.30 \times 10^{-4} p_r\right)$$

$$\therefore \frac{dp_r}{dt} = -0.00299 p_r(t)$$

Separando variáveis e integrando,

$$\frac{dp_r}{dt} = -0.00299 p_r(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dp_r}{p_r} = -0.00299 dt$$

$$\therefore \int_{1600}^{800} \left(\frac{dp_r}{p_r}\right) = -0.00299 \int_0^t dt$$

$$\therefore \ln\left(\frac{800}{1600}\right) = -0.00299t$$

$$\therefore t = -\frac{1}{0.00299} \times \ln\left(\frac{800}{1600}\right) = \boxed{231.8 \text{ sec}}$$

A pressão no reservatório decairá para o valor desejado dentro de aproximadamente 3 minutos e 50 segundos.

■ Prob. 14

Sabendo que o tanque *R* está inicialmente vazio, pode-se supor que M_e = 1.0. Portanto, $(fL_{max}/D)_e$ = 0 e

$$\frac{fL}{D} = \frac{0.021 \times 40}{0.02} = 42.0 = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_i - \underbrace{\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_e}_{=0}$$

$$\therefore \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_i = 42.0$$

Entrando com esse valor na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS, extraímos o número de Mach M_i = 0.1244. Em seguida, inserimos M_i no webapp de escoamentos isentrópicos e obtemos p_i/p_{oi} = 0.9892 e T_i/T_{oi} = 0.9969. Portanto, p_i = 0.9892p_r e T_i = 0.9969 × 340 = 338.9 K. A densidade do ar na estação i (ou seja, na saída do tanque *L*) é

$$\rho_i = \frac{p_i}{RT_i} = \frac{0.9892 p_r}{0.287 \times 338.9} = 0.0102 p_r$$

e a velocidade V_i é dada por

$$V_i = M_i\sqrt{\gamma RT_i} = 0.1244\times\sqrt{1.4\times 287\times 338.9} = 45.91 \text{ m/s}$$

A vazão mássica $\dot{m}$ é então

$$\dot{m}_i = \dot{m}_e = \rho_i A_i V_i = 0.0102\,p_r \times\left(\frac{\pi}{4}\times 0.02^2\right)\times 45.91 = 1.47\times 10^{-4}\,p_r$$

Note que escrevemos $\dot{m}_e = \dot{m}_i$ porque a vazão mássica na estação de saída '*e*' deve ser igual à vazão mássica na seção de entrada '*i*'. Para que exista um escoamento de Fanno ao longo do tubo, a temperatura de estagnação T_o deve ser constante. Portanto, para o tanque *L*,

$$p_{oL}\forall = m_L RT_o$$

onde ∀ denota o volume do tanque. Derivando com relação ao tempo,

$$\forall\frac{dp_{oL}}{dt} = RT_o\frac{dm_L}{dt}$$

Separando variáveis,

$$\frac{dm_L}{dt} = \frac{\forall}{RT_o}\frac{dp_{oL}}{dt}$$

Mas dm_L/dt é igual a −1 × vazão mássica de entrada = $-\dot{m}_i$, logo

$$\frac{\forall}{RT_o}\frac{dp_{oL}}{dt} = -\dot{m}_i \quad\rightarrow\quad \frac{5}{0.287\times 343}\frac{dp_{oL}}{dt} = -1.47\times 10^{-4}\,p_{oL}$$

$$\therefore 0.0508\times\frac{dp_{oL}}{dt} = -1.47\times 10^{-4}\,p_{oL}$$

$$\therefore \frac{dp_{oL}}{dt} = -\frac{1.47\times 10^{-4}}{0.0508}\,p_{oL}$$

$$\therefore \frac{dp_{oL}}{dt} = -0.00289\,p_{oL} \quad \textbf{(I)}$$

Analogamente, para o tanque *R*,

$$p_{oR}\forall = m_R RT_o \quad\rightarrow\quad \frac{dm_R}{dt} = \left(\frac{\forall}{RT_o}\right)\frac{dp_{oR}}{dt}$$

$$\therefore\left(\frac{\forall}{RT_o}\right)\frac{dp_{oR}}{dt} = \dot{m}_e = \dot{m}_i = -\left(\frac{\forall}{RT_o}\right)\frac{dp_{oL}}{dt}$$

A última passagem sugere que

$$\frac{dp_{oR}}{dt} = -\frac{dp_{oL}}{dt}$$

Intuitivamente, a pressão no tanque *R cresce* ao longo do tempo com a mesma taxa com a qual a pressão no tanque *L decresce* ao longo do tempo. Segue que

$$\Delta p_{oR} = -\Delta p_{oL} \quad \to \quad p_{oR_2} - p_{oR_1} = -\left(p_{oL_2} - p_{oL_1}\right)$$

$$\therefore 500 - 0 = -\left(p_{oL_2} - p_{oL_1}\right)$$

$$\therefore p_{oL_2} - p_{oL_1} = -500$$

$$\therefore p_{oL_2} - 4000 = -500$$

$$\therefore p_{oL_2} = 4000 - 500 = 3500 \text{ kPa}$$

Separando variáveis em **(I)** e integrando,

$$\frac{dp_{oL}}{dt} = -0.00289\,p_{oL} \quad \to \quad \frac{dp_{oL}}{p_{oL}} = -0.00289dt$$

$$\therefore \int_{4\text{ MPa}}^{3.5\text{ MPa}} \frac{dp_{oL}}{p_{oL}} = -0.00289\Delta t$$

$$\therefore \Delta t = \frac{1}{-0.00289} \times \ln\left(\frac{3.5}{4}\right) = \boxed{46.2\text{ s}}$$

A pressão desejada no tanque *R* será atingida dentro de aproximadamente 46 segundos.

■ Prob. 15

Parte (a).i: Considere primeiramente o sistema com um choque na garganta do bocal. Utilizamos a razão de áreas $A_3/A_3^\star$ = 3 no webapp de choques normais do *engineering.com* e lemos M_3 = 0.1974 e p_3/p_{o3} = 0.9732. Entramos com M_1 na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS e extraímos o comprimento de atrito $fL_{3\text{max}}/D$ = 14.985 e a razão de pressões $p_3/p^\star$ = 5.5279. Temos ainda o comprimento de atrito da porção de área constante,

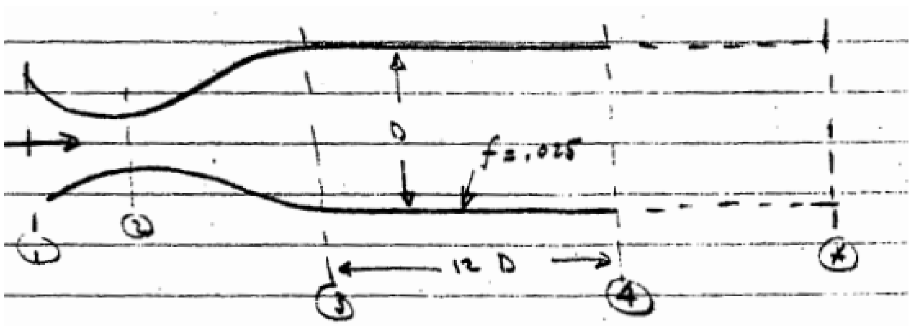
$$\frac{f\Delta x}{D} = \frac{0.025 \times 12\cancel{D}}{\cancel{D}} = 0.30$$

Para obter o comprimento de atrito da estação 4, escrevemos

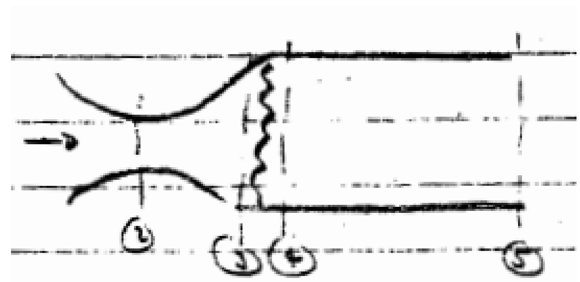
$$\frac{fL_{4,\max}}{D} = \frac{fL_{3,\max}}{D} - \frac{f\Delta x}{D} = 14.985 - 0.30 = 14.685$$

Inserimos $fL_{4\max}/D$ na calculadora de escoamentos de Fanno e lemos M_4 = 0.1991 e $p_4/p^\star$ = 5.4803. Podemos prosseguir e determinar a pressão estática p_4,

$$p_4 = \left(\frac{p_4}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_3}\right)\left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right)\left(\frac{p_{o3}}{p_4}\right)p_{o1} = 5.4803 \times \frac{1}{5.5279} \times 0.9732 \times 1 \times 150 = \boxed{144.7 \text{ psia}}$$



Parte (a).ii: Considere agora um sistema com choque na saída do bocal. Inserimos $A_3/A_3^\star$ = 3 no webapp de escoamentos isentrópicos (não esqueça de especificar $A_3/A_3^\star(\text{sup})$ para que o app retorne a solução supersônica) e extraímos M_3 = 2.6374 e p_3/p_{o3} = 0.0473. Em seguida, entramos com M_3 no webapp de choques normais e lemos o Mach a jusante do choque, que é M_4 = 0.5007; temos também a razão de pressões p_4/p_3 = 7.9485. Prosseguindo, entramos com M_4 na calculadora de escoamentos de Fanno e obtemos o parâmetro $fL_{4\max}/D$ = 1.0634 e a razão de pressões $p_4/p^\star$ = 2.1350. Para obter o comprimento de atrito da estação 5, escrevemos



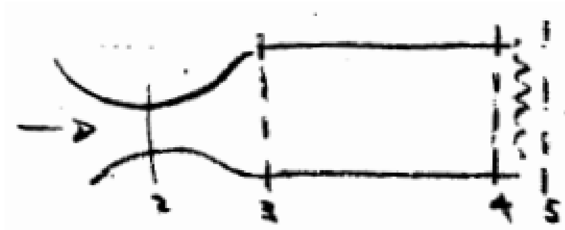
$$\frac{fL_{5,\max}}{D} = \frac{fL_{4,\max}}{D} - \frac{f\,\Delta x}{D} = 1.0634 - 0.30 = 0.7634$$

Inserimos $fL_{5\max}/D$ na calculadora de escoamentos de Fanno e lemos M_5 = 0.5439 e $p_5/p^\star$ = 1.9571. Podemos prosseguir e determinar a pressão estática p_5,

$$p_5 = \left(\frac{p_5}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_4}\right)\left(\frac{p_4}{p_3}\right)\left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right)\left(\frac{p_{o3}}{p_{o1}}\right)p_{o1}$$

$$\therefore\ p_5 = 1.9571 \times \frac{1}{2.1350} \times 7.9485 \times 0.0473 \times 1.0 \times 150 = \boxed{51.70 \text{ psia}}$$

Parte (a).iii: Considere agora um sistema com choque na saída do duto. Inserimos $A_3/A_3^\star$ = 3 no webapp de escoamentos isentrópicos (do mesmo modo que no caso (ii), não esqueça de especificar $A_3/A_3^\star(\text{sup})$ para que o app retorne a solução supersônica) e extraímos M_3 = 2.6374 e p_3/p_{o3} = 0.0473. Inserimos M_3 na calculadora de escoamentos de Fanno e extraímos $fL_{3,\text{max}}/D$ = 0.4599 e $p_3/p^\star$ = 0.2686. Segue que, para a seção 4,



$$\frac{fL_{4,\max}}{D} = \frac{fL_{3,\max}}{D} - \frac{f\Delta x}{D} = 0.4599 - 0.3 = 0.1599$$

Entramos com esse valor na calculadora de escoamentos de Fanno e extraímos M_4 = 1.5655 e $p_4/p^\star$ = 0.5732. Em seguida, inserimos M_4 no webapp de escoamentos normais e lemos p_5/p_4 = 2.6926. Podemos prosseguir e determinar a pressão estática p_5,

$$p_5 = \left(\frac{p_5}{p_4}\right)\left(\frac{p_4}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_3}\right)\left(\frac{p_3}{p_{o3}}\right)\left(\frac{p_{o3}}{p_{o1}}\right)p_{o1}$$

$$\therefore\ p_5 = 2.6926 \times 0.5732 \times \frac{1}{0.2686} \times 0.0473 \times 1 \times 150 = \boxed{40.77\ \text{psia}}$$

Parte (b): Para que haja um escoamento supersônico ao longo de todo o duto sem a ocorrência de choques, podemos utilizar a solução da parte (a).iii (solução com choque na saída do duto) e determinar a pressão p_{rec} necessária,

$$p_{\text{rec}} = p_4 = \left(\frac{p_4}{p_5}\right)p_5 = \frac{1}{2.6926} \times 40.77 = \boxed{15.14\ \text{psia}}$$

■ Prob. 16

Parte (a): Sendo a razão de áreas $A_2/A_1 = A_2/A^*$ = 2.9, o webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* fornece M_2 = 2.6014. Em seguida, entramos com esse número de Mach na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS e lemos $(fL_{\text{max}}/D)_2$ = 0.4529. Temos ainda fL/D = 0.02 × 20/1 = 0.4. Como $L < L_{max}$, o escoamento não pode alcançar M_e = 1. Para computar o número de Mach na saída e, temos

$$\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_e = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_2 - \frac{fL}{D} = 0.4529 - 0.4 = 0.0529$$

que, inserindo na calculadora de escoamentos de Fanno, fornece M_e = 1.2636. Na garganta do bocal, evidentemente tem-se M = 1, p_t/p_{ot} = 0.5283 e T_t/T_{ot} = 0.8333 (essas razões devem ser familiares para o leitor), logo

$$p_t = \left(\frac{p_t}{p_{ot}}\right) p_{ot} = 0.5283 \times 650 = 343.4 \text{ kPa}$$

$$T_t = \left(\frac{T_t}{T_{ot}}\right) T_{ot} = 0.8333 \times 1000 = 833.3 \text{ K}$$

Ademais, a área de seção da garganta é $A_t = (\pi \times 0.01^2/4)/2.9 = 2.71\times10^{-5}$ m². A densidade ρ_t do ar atravessando a garganta é

$$\rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = \frac{343.4 \times 10^3}{287 \times 833.3} = 1.436 \text{ kg/m}^3$$

e a velocidade V_t do escoamento na garganta é

$$V_t = M_t \sqrt{\gamma R T_t} = 1.0 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 833.3} = 578.6 \text{ m/s}$$

Por fim, a vazão mássica que procuramos é

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t = 1.436 \times \left(2.71 \times 10^{-5}\right) \times 578.6 = \boxed{0.0225 \text{ kg/s}}$$

Parte (b): Entrando com M_2 = 2.6014 no webapp de escoamentos isentrópicos, lê-se p_2/p_{o2} = 0.0500. Inserindo M_e = 1.2636 na calculadora de escoamentos de Fanno, obtemos p_e/p^* = 0.7548. Entrando com M_2 = 2.6014 na calculadora de escoamentos de Fanno, extraímos p_2/p^* = 0.2745. Prosseguimos para determinar a pressão estática p_2, qual seja,

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_{o2}}\right) p_{o2} = 0.0500 \times 650 = 32.50 \text{ kPa}$$

e em seguida a pressão p_e no plano de saída do duto,

$$p_e = \left(\frac{p_e}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_2}\right) p_2 = 0.7548 \times \frac{1}{0.2745} \times 32.50 = \boxed{89.37 \text{ kPa}}$$

Parte (c): Nesse caso, ocorre um choque normal estacionário na saída do bocal (estação 2). Designamos a entrada do duto no lado a jusante do choque como seção 3. Com M_2 = 2.6014, recorremos ao webapp de choques normais e lemos M_3 = 0.5037 e p_3/p_2 = 7.7285. A pressão estática p_3 é então

$$p_3 = \left(\frac{p_3}{p_2}\right) p_2 = 7.7285 \times 32.50 = 251.2 \text{ kPa}$$

Inserindo M_3 = 0.5037 na calculadora de escoamentos de Fanno, tem-se $(fL_{max}/D)_3$ = 1.0393 e p_3/p^* = 2.1216. Lembrando que fL/D = 0.4 conforme determinado na parte (a), escrevemos

$$\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_e = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_3 - \frac{fL}{D} = 1.0393 - 0.4 = 0.6393$$

Inserimos esse $fL_{\max}/D$ na calculadora de escoamentos de Fanno e obtemos o número de Mach M_e = 0.5667 e a razão de pressões p_e/p^* = 1.8739. Finalmente, a contrapressão p_e que buscamos é

$$p_e = \left(\frac{p_e}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_3}\right) p_3 = 1.8739 \times \frac{1}{2.1216} \times 251.2 = \boxed{221.9 \text{ kPa}}$$

Parte (d): Nesse caso, temos um choque logo a jusante da garganta do bocal. Consequentemente, um escoamento subsônico é projetado para fora do bocal. Com $A_2/A_1 = A_2/A^*$ = 2.9, recorremos ao webapp de escoamentos isentrópicos e lemos M_2 = 0.2046 e p_2/p_{o2} = 0.9712. Em seguida, entramos com M_2 = 0.2046 na calculadora de escoamentos de Fanno e lemos $(fL_{max}/D)_2$ = 13.7780 e p^*/p_2 = 5.3318. Com fL/D = 0.4 conforme calculado na parte (a), tem-se $(fL_{max}/D)_e$ = 13.778 – 0.4 = 13.378; inserindo esse valor na calculadora de escoamentos de Fanno, obtemos M_e = 0.2072 e p_e/p^* = 5.2650. Resta apenas determinar a contrapressão p_e,

$$p_e = \left(\frac{p_e}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_{o2}}\right)\left(\frac{p_{o2}}{p_{ot}}\right) p_{ot} = 5.2650 \times \frac{1}{5.3318} \times 0.9712 \times 650 = \boxed{623.4 \text{ kPa}}$$

■ Prob. 17

Parte (a): Para obter o número de Mach M_2, basta inserir M_1 = 2.5 no webapp de choques normais do *engineering.com*; ao fazê-lo, encontramos M_2 = 0.513. Como o escoamento atinge Mach 1.0 na seção 4 (estrangulamento), tem-se p_4/p_{o4} = 0.5283. Podemos usar esse resultado e $p_{o3} = p_{o4}$ para obter

$$p_{o3} = p_{o4} = \left(\frac{p_{o4}}{p_4}\right) p_4 = \frac{1}{0.5283} \times 14.7 = 27.83 \text{ psia}$$

Em seguida, com $p_{o1}/p_o^* = A/A^*$ = 2.6367, tem-se

$$\frac{p_{o3}}{p_o^*} = \left(\frac{p_{o3}}{p_{o1}}\right)\left(\frac{p_{o1}}{p_o^*}\right) = \frac{27.83}{67} \times 2.6367 = 1.0952$$

Inserimos essa razão de pressões na calculadora de escoamentos de Fanno e obtemos M_3 = 0.699.

Parte (b): Entramos com M_2 = 0.513 na calculadora de escoamentos de Fanno e obtemos fL_{max2}/D = 0.9679. Analogamente, entramos com M_3 = 0.699 e lemos fL_{max3}/D = 0.2101. Segue que o comprimento de atrito é

$$\frac{f\,\Delta x}{D}=\frac{fL_{2,\max}}{D}-\frac{fL_{3,\max}}{D}=0.9679-0.2101\approx\boxed{0.758}$$

■ Prob. 18

O número de Mach na estação inicial é

$$M_1=\frac{V_1}{a_1}=\frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}}=\frac{100}{\sqrt{1.4\times 287\times 320}}=0.279$$

Inserimos esse valor no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e obtemos a razão de temperaturas T_1/T_{o1} = 0.9847. A temperatura de estagnação T_{o1} é então

$$\frac{T_1}{T_{o1}}=0.9847\ \rightarrow\ T_{o1}=\frac{T_1}{0.9847}$$

$$\therefore T_{o1}=\frac{320}{0.9847}=325.0\ \text{K}$$

Inserindo o número de Mach inicial M_1 obtido acima na calculadora de escoamentos de Rayleigh do PDAS, lê-se T_{o1}/T_o^* = 0.3085. Portanto,

$$\frac{T_{o1}}{T_o^*}=0.3085\ \rightarrow\ T_o^*=\frac{T_{o1}}{0.3085}$$

$$\therefore T_o^*=\frac{325.0}{0.3085}=1053.5\ \text{K}$$

A vazão mássica $\dot{m}$ é dada por

$$\dot{m}=\rho_1 AV_1=\left(\frac{p_1}{RT_1}\right)AV_1=\frac{\left(200\times 10^3\right)}{287\times 320}\times\left(\frac{\pi\times 0.015^2}{4}\right)\times 100=0.0385\ \text{kg/s}$$

Resta apenas obter a taxa de transferência de calor para escoamento estrangulado,

$$\dot{q}=\dot{m}c_p\left(T_o^*-T_{o1}\right)=0.0385\times 1005\times\left(1053.5-325.0\right)=28{,}188\ \text{W}$$

$$\therefore \boxed{\dot{q}=28.19\ \text{kW}}$$

■ Prob. 19

Primeiramente, inserimos M_1 = 2.4 na calculadora de escoamentos de Rayleigh e lemos $T_{o1}/T_o^{\star}$ = 0.7242. Segue que a temperatura de estagnação necessária para estrangular o duto é

$$\frac{T_{o1}}{T_o^*} = 0.7242 \quad \rightarrow \quad T_o^* = \frac{T_{o1}}{0.7242}$$

$$\therefore T_o^* = \frac{880}{0.7242} = 1215 \text{ K}$$

Ademais, inserimos M_1 = 2.4 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e obtemos as razões

$$\frac{T_1}{T_{o1}} = 0.4647 \quad ; \quad \frac{p_1}{p_{o1}} = 0.0684$$

Portanto,

$$\frac{T_1}{T_{o1}} = 0.4647 \quad \rightarrow \quad T_1 = 0.4647 T_{o1}$$

$$\therefore T_1 = 0.4647 \times 880 = 408.9 \text{ K}$$

$$\frac{p_1}{p_{o1}} = 0.0684 \quad \rightarrow \quad p_1 = 0.0684 p_{o1}$$

$$\therefore p_1 = 0.0684 \times 750 = 51.3 \text{ kPa}$$

A vazão mássica é determinada a seguir,

$$\dot{m} = \rho_1 A V_1 = \left(\frac{p_1}{RT_1}\right) A M_1 \sqrt{\gamma R T_1}$$

$$\therefore \dot{m} = \frac{\left(51.3 \times 10^3\right)}{287 \times 408.9} \times \left(\frac{\pi \times 0.08^2}{4}\right) \times 2.4 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 408.9} = 2.138 \text{ kg/s}$$

Segue que a taxa de transferência de calor buscada é

$$\dot{q} = \dot{m} c_p \left(T_o^* - T_{o1}\right) = 2.138 \times 1005 \times (1215 - 880) = 719{,}800 \text{ W}$$

$$\therefore \boxed{\dot{q} = 719.8 \text{ kW}}$$

■ Prob. 20

Parte (a): A velocidade do som na estação inicial, que designamos como '1,' é

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 500} = 448.2 \text{ m/s}$$

Segue que o número de Mach na estação 1 é $M_1 = V_1/a_1$ = 540/448.2 = 1.205. Entramos com esse M_1 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e extraímos T_1/T_{o1} = 0.7750; logo,

$$T_{o1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1}\right) T_1 = \frac{1}{0.7750} \times 500 = 645.2 \text{ K}$$

Ademais, podemos entrar com M_1 = 1.205 na calculadora de escoamentos de Rayleigh e ler as razões $T_1/T^{\star}$ = 0.9093 e $p_1/p^{\star}$ = 0.7913. Para determinar a razão de temperaturas $T_{o2}/T_o^{\star}$, utilizamos T_{o2}/T_{o1} = 0.639 conforme fornece o enunciado e obtemos $T_{o1}/T_o^{\star}$ = 0.9779 ao inserir M_1 = 1.205 na referida calculadora. Portanto,

$$\frac{T_{o2}}{T_o^*} = \left(\frac{T_{o1}}{T_o^*}\right)\left(\frac{T_{o2}}{T_{o1}}\right) = 0.9779 \times 0.639 = 0.6249$$

Inserimos essa razão na calculadora de escoamentos de Rayleigh e obtemos M_2 = 3.363. Tem-se ainda a razão de pressões $p_2/p^{\star}$ = 0.1426 e a razão de temperaturas $T_2/T^{\star}$ = 0.2299. Podemos prosseguir e determinar a pressão e temperatura estáticas p_2 e T_2,

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_1}\right) p_1 = 0.1426 \times \frac{1}{0.7913} \times 135 = \boxed{24.33 \text{ kPa}}$$

$$T_2 = \left(\frac{T_2}{T^*}\right)\left(\frac{T^*}{T_1}\right) T_1 = 0.2299 \times \frac{1}{0.9093} \times 500 = \boxed{126.4 \text{ K}}$$

Parte (b): Inserindo M_1 = 1.205 na calculadora de escoamentos de Rayleigh como fizemos na parte anterior, lê-se $s_{1,max}/R$ = 0.09882. Da mesma forma, podemos inserir M_2 = 3.363 e obter $s_{2,max}/R$ = 3.1976. Resta apenas calcular a variação de entropia Δs,

$$\Delta s = \left[\frac{s_{1,\max}}{R} - \frac{s_{2,\max}}{R}\right] R = (0.09882 - 3.1976) \times 287 = \boxed{-889.4 \text{ J/K}}$$

O fato de a entropia ser negativa indica que o sistema está *perdendo* calor.

■ Prob. 21

Primeiramente, calculamos a velocidade do som a_1 na entrada da câmara de combustão,

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 450} = 425.2 \text{ m/s}$$

e o número de Mach correspondente,

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{42}{425.2} = 0.0988$$

Entramos com esse valor na calculadora de escoamentos de Rayleigh do PDAS e lemos as razões

$$\frac{T_1}{T_1^*} = 0.0547 \quad ; \quad \frac{T_{o1}}{T_{o1}^*} = 0.04567$$

Da mesma forma, inserimos M_1 no webapp de escoamentos isentrópicos do *engineering.com* e obtemos T_1/T_{o1} = 0.9981. Usando o subscrito '2' para representar condições na saída da câmara de combustão, temos

$$\frac{T_2}{T^*} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{T_1}{T^*}\right) = \frac{1100}{450} \times 0.0547 = 0.1337$$

Inserimos esse valor na calculadora de escoamentos de Rayleigh e lemos o número de Mach M_2 = 0.158. Entramos com esse número de Mach no webapp de escoamentos isentrópicos e obtemos T_2/T_{o2} = 0.9950. Podemos prosseguir e determinar as temperaturas de estagnação T_{o1} e T_{o2},

$$T_{o1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1}\right)T_1 = \frac{1}{0.9981} \times 450 = 450.9 \text{ K}$$

$$T_{o2} = \left(\frac{T_{o2}}{T_2}\right)T_2 = \frac{1}{0.9950} \times 1100 = 1106 \text{ K}$$

Em seguida, escrevemos um balanço energético,

$$\dot{q} = \dot{m}_a c_p \Delta T_o = \dot{m}_f \overline{HV}$$

Resolvendo para a razão de vazões mássicas e substituindo os valores pertinentes, tem-se

$$\dot{m}_a c_p \Delta T_o = \dot{m}_f \overline{HV} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} = \frac{c_p \Delta T_o}{\overline{HV}}$$

$$\therefore \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} = \frac{c_p\left(T_{o2} - T_{o1}\right)}{\overline{HV}} \quad \textbf{(I)}$$

$$\therefore \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} = \frac{1.005 \times (1106 - 450)}{48,000} = \boxed{0.0137}$$

Para estrangular o escoamento, é necessário que $T_{o2} = T_o^*$, onde

$$T_o^* = \left(\frac{T_o^*}{T_{o1}}\right)T_{o1} = \frac{1}{0.04567} \times 450 = 9853 \text{ K}$$

Substituindo em **(I)**,

$$\frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} = \frac{c_p\left(T_o^* - T_{o1}\right)}{\overline{\overline{HV}}} = \frac{1.005\times\left(9853-450\right)}{48,000} = \boxed{0.1969}$$

■ Prob. 22

Parte (a): Sendo a contrapressão igual a 0 kPa e sabendo que há uma taxa de *perda* de calor ao longo do duto, concluímos que o escoamento no duto será supersônico e acelerado. Para tanto, devemos ter M_1 = 1.0 na entrada do duto, de modo que T_{o1} = T_o^* = 873 K. Lembrando que, para Mach 1, temos as razões

$$\frac{T_1}{T_{o1}} = 0.8333 \quad ; \quad \frac{p_1}{p_{o1}} = 0.5283$$

logo,

$$T_1 = 0.8333\times 873 = 727.5 \text{ K}$$

$$p_1 = p^* = 0.5283\times 560 = 295.8 \text{ kPa}$$

Realizando um balanço energético no duto,

$$\dot{q} = c_p\left(T_{o2} - T_{o1}\right) \quad \rightarrow \quad T_{o2} = T_{o1} + \frac{\dot{q}}{c_p}$$

$$\therefore T_{o2} = 873 + \frac{(-250)}{1.005} = 624.2 \text{ K}$$

Logo,

$$\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = \frac{624.2}{873} = 0.7150$$

Entrando com essa razão de temperaturas de estagnação na calculadora de escoamentos de Rayleigh, obtemos M_2 = 2.4642 e p_2/p^* = 0.2526. Podemos então determinar p_2,

$$p_2 = p_e = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)p^* = 0.2526\times 295.8 = \boxed{74.72 \text{ kPa}}$$

Expansões de Prandtl-Meyer ocorrem no lado de fora do duto para permitir que a pressão atinja a contrapressão de 0 kPa. Resta apenas calcular a vazão mássica $\dot{m}$,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \left(\frac{p_1}{RT_1}\right)\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\left(M_1\sqrt{\gamma R T_1}\right)$$

$$\therefore \dot{m} = \left(\frac{295.8}{0.287\times 727.5}\right)\times\left(\frac{\pi\times 0.02^2}{4}\right)\times\left(1.0\times\sqrt{1.4\times 287\times 727.5}\right) = \boxed{0.241 \text{ kg/s}}$$

Parte (b): O número de Mach a montante do choque é 2.4642. Entrando com esse valor no webapp de choques normais, lê-se uma razão de pressões estáticas igual a 6.9177. Segue que a pressão p_e na saída do duto é

$$\frac{p_e}{p_2} = 6.9177 \quad \rightarrow \quad p_e = 6.9177\,p_2$$

$$\therefore p_e = 6.9177 \times 74.72 = \boxed{516.9 \text{ kPa}}$$

■ Prob. 23

Parte (a): Observando que D = 12 in. = 1 ft, iniciamos a solução com o cálculo do fator adimensional $f\Delta x/D$,

$$\frac{f\,\Delta x}{D} = \frac{0.02 \times 10.86}{1.0} = 0.2172$$

Sendo o número de Mach M_1 na entrada igual a 3.0, podemos recorrer à calculadora de escoamentos de Fanno e ler o valor fL_{max}/D = 0.5222 e a razão de pressões de estagnação $p_{o1}/p_o^\star$ = 4.2346. Portanto,

$$\frac{fL_{2\max}}{D} = \frac{fL_{1\max}}{D} - \frac{f\,\Delta x}{D} = 0.5222 - 0.2172 = 0.305$$

Inserimos fL_{2max}/D na calculadora de escoamentos de Fanno e extraímos M_2 = 2.0 e $p_{o2}/p_o^\star$= 1.6875. Ademais, a temperatura de estagnação se conserva e podemos escrever T_{o2} = T_{o1} = 600°R. Por fim, a pressão de estagnação na estação 2 é

$$p_{o2} = \left(\frac{p_{o2}}{p_o^*}\right)\left(\frac{p_o^*}{p_{o1}}\right)p_{o1} = 1.6875 \times \frac{1}{4.2346} \times 150 = \boxed{59.78 \text{ psia}}$$

Parte (b): O número de Mach na entrada da seção 3 é M_2 = 2.0. Podemos inserir esse valor na calculadora de escoamentos de Rayleigh e extrair a razão de pressões de estagnação $p_{o2}/p_o^\star$ = 1.5031 e a razão de temperaturas de estagnação $T_{o2}/T_o^\star$ = 0.7934. A razão de pressões de estagnação na seção 3 é $p_{o3}/p_o^\star$ = 1.0. Segue que pressão de estagnação na seção 3 é

$$p_{o3} = \left(\frac{p_{o3}}{p_o^*}\right)\left(\frac{p_o^*}{p_{o2}}\right)p_{o2} = 1.0 \times \frac{1}{1.5031} \times 59.78 = \boxed{39.77 \text{ psia}}$$

ao passo que a pressão estática p_3 é

$$p_3 = \left(\frac{p_3}{p_{o2}}\right)p_{o2} = 0.5283 \times 39.77 = \boxed{21.01 \text{ psia}}$$

Prosseguimos para determinar a temperatura de estagnação na seção 3,

$$T_{o3} = \left(\frac{T_{o3}}{T_o^*}\right)\left(\frac{T_o^*}{T_{o2}}\right)T_{o2} = 1.0 \times \frac{1}{0.7934} \times 600 = \boxed{756.2°\text{R}}$$

Finalmente, determinamos a temperatura estática T_3,

$$T_3 = \left(\frac{T_3}{T_{o2}}\right)T_{o2} = 0.8333 \times 756.2 = \boxed{630.1°\text{R}}$$

Parte (c): A taxa de inserção de calor no segmento 2-3 do conduto é

$$\dot{q} = c_p\left(T_{o3} - T_{o2}\right) = 0.24 \times \left(756.2 - 600\right) \approx \boxed{37.5\ \text{Btu/lbm}}$$

■ Prob. 24

A velocidade do som a_1 na entrada do duto é

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 278} = 334.2\ \text{m/s}$$

e o número de Mach é

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{30}{334.2} = 0.0898$$

Entramos com esse valor na calculadora de escoamento de Rayleigh do PDAS e extraímos

$$\frac{p_1}{p_1^*} = 2.3732 \quad ; \quad \frac{T_1}{T_1^*} = 0.04542$$

Entramos com o mesmo Mach M_1 no webapp de escoamentos isentrópicos para obter T_1/T_{o1} = 0.9984. Podemos então calcular a razão de temperaturas

$$\frac{T_2}{T^*} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{T_1}{T^*}\right) = \frac{338}{278} \times 0.04542 = 0.0552$$

Inserimos essa razão de temperaturas na calculadora de escoamentos de Rayleigh e lemos M_2 = 0.09924. Entramos com esse número de Mach no webapp de escoamentos isentrópicos e lemos a razão T_2/T_{o2}; analogamente, entramos com o referido número de Mach M_2 na calculadora de escoamentos de Rayleigh e lemos a razão $p_2/p_2^{\star}$. Os valores obtidos são

$$\frac{T_2}{T_{o2}} = 0.9980 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_2^*} = 2.3674$$

A vazão mássica no tubo é determinada a seguir,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \left(\frac{p_1}{RT_1}\right)\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)V_1$$

$$\therefore \dot{m} = \left(\frac{70,000}{287 \times 278}\right) \times \left(\frac{\pi \times 0.05^2}{4}\right) \times 30 = 0.0517 \text{ kg/s}$$

Escrevendo um balanço energético em um elemento infinitesimal do volume de controle, tem-se

$$\dot{m}c_p dT_o = \delta q = \bar{h}dA\left(T_w - T_o\right) = \bar{h}\pi D\left(T_s - T_o\right)dx$$

Separando variáveis,

$$\dot{m}c_p dT_o = \bar{h}\pi D\left(T_s - T_o\right)dx \quad \rightarrow \quad -\frac{dT_o}{T_o - T_s} = \frac{\pi \bar{h} D}{\dot{m}c_p}dx$$

Integrando ao longo do comprimento do tubo,

$$-\int_{T_{o1}}^{T_{o2}} \frac{dT_o}{T_o - T_s} = \int_0^L \frac{\pi \bar{h} D}{\dot{m}c_p}dx$$

$$\therefore \ln\left(\frac{T_{o1} - T_s}{T_{o2} - T_s}\right) = \frac{\pi \bar{h} DL}{\dot{m}c_p} \quad \textbf{(I)}$$

As temperaturas de estagnação T_{o1} e T_{o2} podem ser obtidas com as razões de temperatura estabelecidas no início da solução,

$$T_{o1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1}\right)T_1 = \frac{1}{0.9984} \times 278 = 278.4 \text{ K}$$

$$T_{o2} = \left(\frac{T_{o2}}{T_1}\right)T_1 = \frac{1}{0.9980} \times 338 = 338.7 \text{ K}$$

Resolvendo **(I)** para o comprimento de tubo *L*,

$$\ln\left(\frac{T_{o1} - T_s}{T_{o2} - T_s}\right) = \frac{\pi \bar{h} DL}{\dot{m}c_p} \quad \rightarrow \quad L = \frac{\dot{m}c_p}{\pi \bar{h} D}\ln\left(\frac{T_{o1} - T_s}{T_{o2} - T_s}\right)$$

$$\therefore L = \frac{0.0517 \times 1005}{\pi \times 140 \times 0.05} \times \ln\left(\frac{278.4 - 433}{338.7 - 433}\right) = \boxed{1.168 \text{ m}}$$

Para computar a queda de pressão associada ao presente escoamento de Rayleigh, obtemos a pressão p_2,

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_1}\right)p_1 = 2.3674 \times \frac{1}{2.3732} \times 70 = 69.8289 \text{ kPa}$$

e em seguida calculamos $(\Delta p)_{\text{Rgh}}$,

$$(\Delta p)_{\text{Rgh}} = p_2 - p_1 = 69.8289 - 70 = \boxed{-0.1711 \text{ kPa}}$$

A seguir, considere o escoamento de Fanno associado ao sistema sob análise. Inserindo M_1 = 0.0898 na calculadora de escoamentos de Fanno do PDAS, extraímos $p_1/p_1^\star$ = 12.189 e $(fL_{max}/D)_1$ = 83.889. Ademais, temos fL/D = 0.018 × 1.168/0.05 = 0.420 e, na estação '2' (região final do tubo),

$$\left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_2 = \left(\frac{fL_{\max}}{D}\right)_1 - \frac{fL}{D} = 83.889 - 0.420 = 83.469$$

Entrando com esse parâmetro na calculadora de escoamentos de Fanno, lemos o número de Mach M_2 = 0.0900 e a razão de pressões $p_2/p_2^\star$ = 12.1600. Portanto, a pressão p_2 é

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_1}\right)p_1 = 12.160 \times \frac{1}{12.189} \times 70 = 69.8335 \text{ kPa}$$

e em seguida calculamos $(\Delta p)_{\text{Fan}}$,

$$(\Delta p)_{\text{Fan}} = p_2 - p_1 = 69.8335 - 70 = \boxed{-0.1665 \text{ kPa}}$$

A queda de pressão combinada para escoamentos de Rayleigh e Fanno é

$$(\Delta p)_t = (\Delta p)_{\text{Rgh}} + (\Delta p)_{\text{Fan}} = -0.1711 - 0.1665 = \boxed{-0.3376 \text{ kPa}}$$

Referências (★ → Livro altamente recomendado)

1. JOHN, J.E.; KEITH, T.G. **Gas Dynamics**. 3. ed. Pearson, 2006. ★
2. OOSTHUIZEN, P.H.; CARSCALLEN, W.E. **Introduction to Compressible Fluid Flow**. 2. ed. CRC Press, 2014.
3. RATHAKRISHNAN, E. **Gas Dynamics**. 6. ed. PHI Learning, 2017.
4. ZUCKER, R.D.; BIBLARZ, O. **Fundamentals of Gas Dynamics**. 3. ed. John Wiley and Sons, 2020. ★

Referências de cada problema

Problema	Ref.	Problema	Ref.
1	–	13	[1]
2	[4]	14	[1]
3	[4]	15	[4]
4	[3]	16	[1]
5	[1]	17	[4]
6	[1]	18	[1]
7	[4]	19	[1]
8	[2]	20	[4]
9	[2]	21	[1]
10	[1]	22	[4]
11	[3]	23	[4]
12	[1]	24	[1]

Sobre mim

Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

WhatsApp: (61) 981247059
Email: lucas_0150@hotmail.com