



Lista de Exercícios Resolvidos 8
Escoamentos Externos e Arrasto

Lucas Monteiro Nogueira

■ **Problemas**

Problemas Fáceis

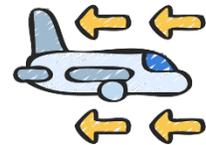
1. Cálculo do Coeficiente de Arrasto
2. Arrasto em uma Placa Plana I
3. Arrasto em uma Placa Plana II
4. Arrasto em uma Placa Plana III
5. Arrasto em uma Superfície Retangular
6. Arrasto em Recipientes Hemisféricos
7. Arrasto em uma Árvore
8. Derivação Rápida da Lei de Stokes
9. Lei de Stokes

Problemas Intermediários

10. Arrasto em Esferas I
11. Arrasto em Esferas II
12. Arrasto em uma Torre Cilíndrica
13. Arrasto em um Cilindro
14. Arrasto em um Cone
15. Problema do Ciclista
16. Problema do Paraquedas
17. Movimento Retardado e Arrasto
18. Economia de Combustível e Dinheiro com Design Aerodinâmico I
19. Lei de Stokes e Eletroforese

Problemas Difíceis

20. Turbina de Savonius
21. Economia de Combustível e Dinheiro com Design Aerodinâmico II
22. Arrasto em um Balão de Hélio



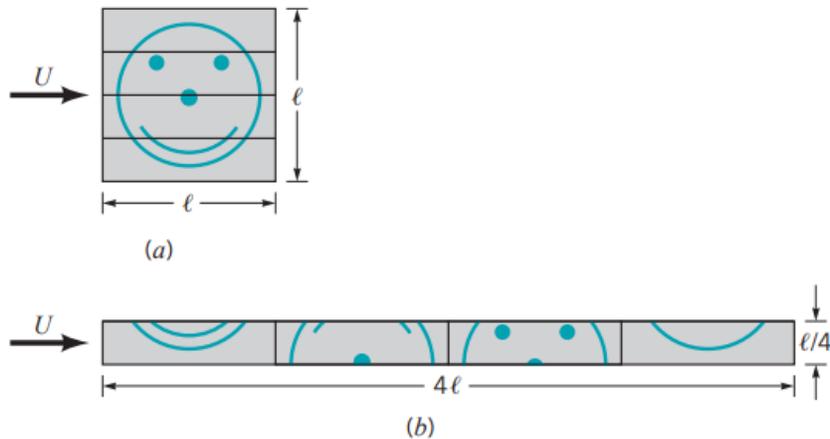
Visite www.hoek.com.br
para mais materiais gratuitos
em engenharia e ciências!

■ Problema 1 (Cálculo do Coeficiente de Arrasto)

O coeficiente de arrasto de um carro exposto a ar a 1 atm, 25°C e 90 km/h deverá ser determinado com um modelo de escala real em um grande túnel de vento. A altura e a largura da superfície do carro projetada perpendicularmente à direção do vento são respectivamente iguais a 1.25 m e 1.65 m. Sabendo que a força horizontal mensurada no carro foi de 220 N, determine o coeficiente de arrasto.

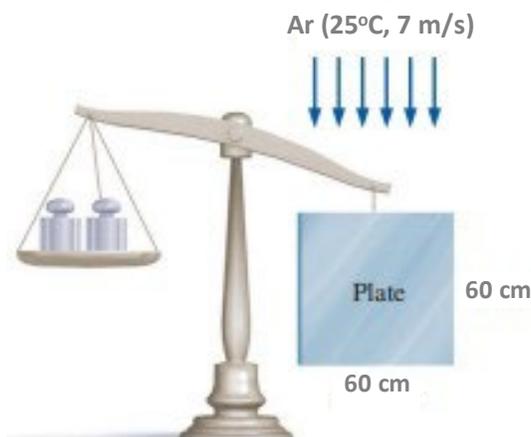
■ Problema 2 (Arrasto em uma Placa Plana I)

Uma placa plana é dividida em quatro pedaços de mesmo tamanho, os quais são arranjados como mostra a figura (b). Encontre a razão entre o arrasto obtido na configuração (a) e o arrasto registrado na figura (b), sabendo que ambas as configurações estão expostas ao mesmo escoamento de velocidade U .



■ Problema 3 (Arrasto em uma Placa Plana II)

A massa de uma placa plana delgada de dimensões 60 × 60 cm é balanceada por contrapesos com massa combinada igual a 2 kg. Nesse momento, ativa-se um ventilador que escoar ar de cima para baixo a 7 m/s, como mostra o desenho. Sob tais condições, encontre a massa do contrapeso que deve ser adicionado à balança para equilibrar o sistema.



■ Problema 4 (Arrasto em uma Placa Plana III)

Um barco plástico cujo casco pode ser interpretado como uma placa plana de 1.5 m de largura e 2 m de comprimento navega em águas a 15°C. A velocidade é constante e igual a 45 km/hr. Determine o arrasto por atrito exercido no casco pela água e a potência necessária para superá-lo. Use $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1.14 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ como a densidade e viscosidade dinâmica da água, respectivamente.



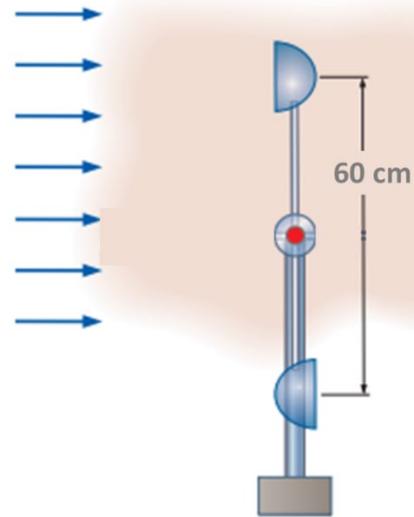
■ Problema 5 (Arrasto em uma Superfície Retangular)

Durante grandes tempestades, veículos elevados como trailers e caminhões podem ser derrubados por ventos laterais fortes, sobretudo quando estiverem sem carga ou em áreas abertas. Considere um caminhão de 5800 kg carregando um container com 10 m de comprimento, 2 m de largura e 3 m de altura. O caminhão está exposto a ventos laterais de velocidade V . Usando $\rho_a = 1.225 \text{ kg/m}^3$ como a densidade do ar, determine o valor V do vento incidente para o qual o caminhão irá tombar. Utilize $C_D = 2.2$ como o coeficiente de arrasto da superfície lateral do caminhão.



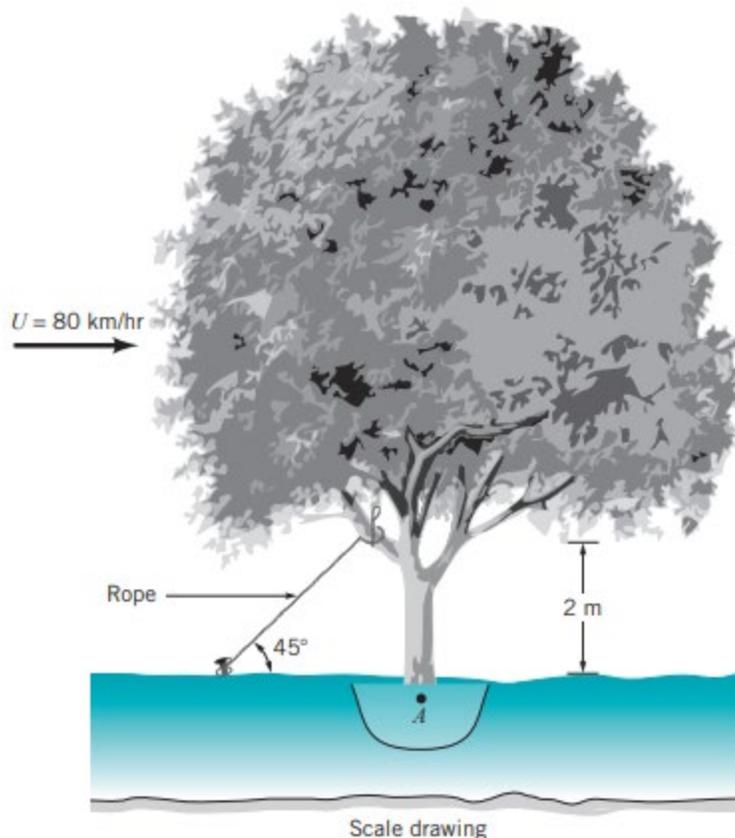
■ Problema 6 (Arrasto em Recipientes Hemisféricos)

Uma turbina eólica consiste de dois recipientes hemisféricos ocios atrelados a uma haste, como mostra a ilustração ao lado. Os recipientes têm diâmetro de 8 cm e a distância centro a centro é 60 cm. Em determinado momento, a articulação (peça em vermelho no esboço) parou de funcionar subitamente. Supondo que a turbina está exposta a um vento com velocidade 20 m/s e temperatura 25°C, determine o torque máximo exercido na articulação.



■ Problema 7 (Arrasto em uma Árvore)

A grande árvore ilustrada a seguir é mantida em equilíbrio por uma corda inclinada em 45° com relação à terra. Sabe-se que o solo arenoso não é capaz de suportar momento algum em relação ao centro A da massa de solo. Estime a tensão na corda quando a árvore é submerta a um vento de 80 km/hr.



■ Problema 8 (Derivação Rápida da Lei de Stokes)

Considere pequenas gotas de óleo (gravidade específica $SG = 0.85$) ascendendo verticalmente enquanto imersas em água. Obtenha uma equação a partir da qual podemos determinar a velocidade terminal da gota (em m/s) como função do diâmetro da gota (em mm). Para qual intervalo de diâmetros de gota será a lei de Stokes válida?

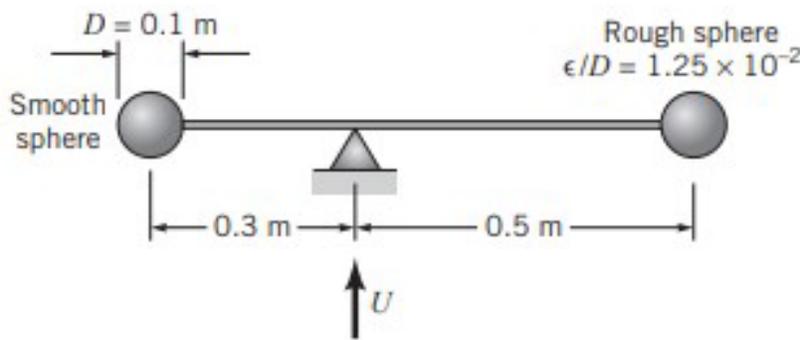


■ Problema 9 (Lei de Stokes)

Uma partícula de poeira de 0.1 mm de diâmetro e densidade 2.1 g/cm^3 está suspensa em ar a 1 atm e 25°C . Determine a velocidade de sedimentação da partícula de poeira. Calcule o número de Reynolds e verifique se o uso da lei de Stokes é válido.

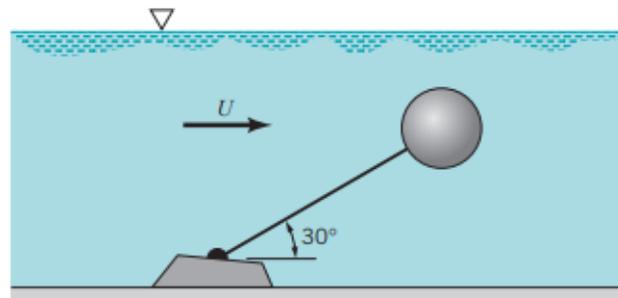
■ Problema 10 (Arrasto em Esferas I)

Uma corrente de vento flui ao longo do sistema ilustrado a seguir, que consiste de uma esfera lisa de outra rugosa, ambas de 0.1 m de diâmetro, presas a uma haste de 80 cm de comprimento. A esfera rugosa possui rugosidade relativa $\epsilon/D = 1.25 \times 10^{-2}$. Sabe-se que o sistema está em equilíbrio quando $U = 0$. Encontre a velocidade U mínima para que o sistema comece a girar no sentido horário.



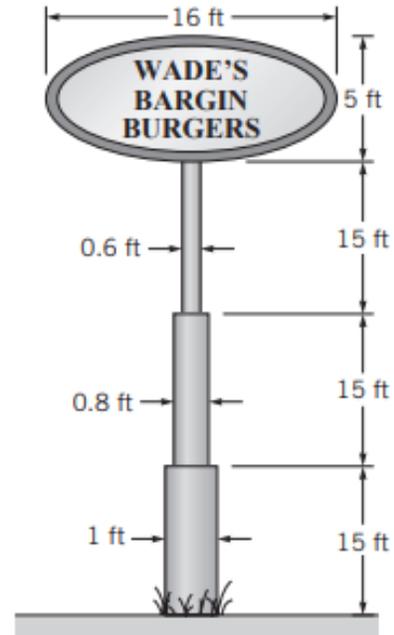
■ Problema 11 (Arrasto em Esferas II)

Um bola de cortiça (gravidade específica = 0.21) é ligada a um cabo ancorado no fundo de um corpo d'água, como ilustra a figura a seguir. No equilíbrio, o cabo perfaz um ângulo de 30° relativamente à horizontal. Desprezando a massa do cabo e o arrasto nele exercido, encontre a velocidade da corrente, U . Use $\nu = 1.12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ como a viscosidade cinemática da água.



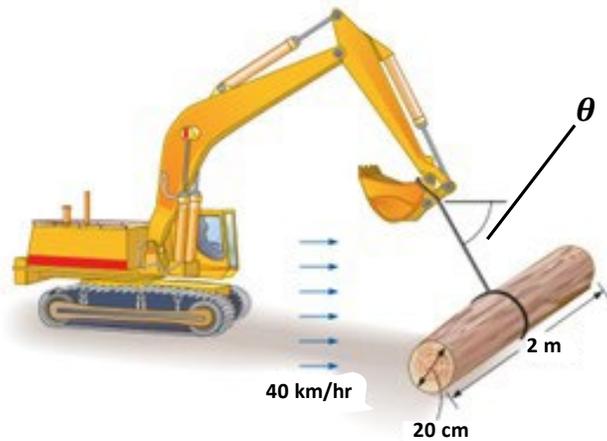
■ **Problema 12 (Arrasto em uma Torre Cilíndrica)**

A estrutura ilustrada ao lado consiste de três postes cilíndricos ao topo dos quais tem-se uma placa em forma de elipse. Estime o arrasto total quando a estrutura está sujeita a um vento de 50 milhas/hora. Use $\rho_a = 0.00238 \text{ slugs/ft}^3$ e $\nu_a = 1.56 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{s}$ respectivamente como a densidade e viscosidade cinemática do ar em unidades imperiais.



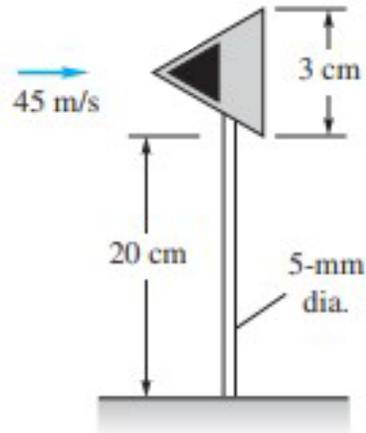
■ **Problema 13 (Arrasto em um Cilindro)**

Um tronco de árvore com formato cilíndrico de 2 m de comprimento e 20 cm de diâmetro é suspenso por uma escavadeira no plano horizontal, conforme ilustrado a seguir. A densidade da madeira é 513 kg/m^3 . O tronco é exposto a ventos (também horizontais) de 40 km/hr. Desprezando o peso do cabo e seu arrasto, determine o ângulo θ que o cabo subtende com a horizontal e a tensão correspondente.



■ Problema 14 (Arrasto em um Cone)

Uma sonda é montada em um sistema constituído por um cone e uma haste cilíndrica, como ilustra a figura a seguir. A sonda está exposta a um escoamento de ar a 45 m/s e temperatura igual a 80°C. Encontre o maior ângulo de abertura do cone a fim que o momento produzido na base da haste seja inferior a 24 N·cm.



■ Problema 15 (Problema do Ciclista)

Um ciclista é capaz de atingir velocidade máxima de 30 km/h em um clima ameno. A massa total do ciclista e da bicicleta é 65 kg. A resistência a rolagem das rodas é $F_R = 7.5$ N e o coeficiente de arrasto e área frontal são $C_D = 1.2$ e $A = 0.25$ m², respectivamente. O ciclista aposta que hoje, ainda que haja um vento contrário de 10 km/hr, ele pode pedalar e atingir uma velocidade de 24 km/hr. O ciclista também aposta que, se pedalar com o respaldo de ventos favoráveis de 10 km/hr, ele pode alcançar uma velocidade máxima de 40 km/hr. O ciclista triunfará em alguma dessas duas apostas? Explique. Use $\rho_a = 1.23$ kg/m³ como a densidade do ar.



■ Problema 16 (Problema do Paraquedas)

Um automóvel de 1500 kg inicialmente a 50 m/s utiliza sua área de arrasto $C_D A = 0.4$ m², freios e um paraquedas para desacelerar. Os freios fornecem 5000 N de resistência. Se o automóvel deve retornar ao estado de repouso em 8 segundos, qual deve ser o diâmetro do paraquedas utilizado?



■ Problema 17 (Movimento Retardado e Arrasto)

Um avião com peso igual a 50 kN e produto área \times coef. de arrasto igual a 8 m^2 pousa em uma pista ao nível do mar com velocidade 70 m/s. O avião aciona um paraquedas de 3 m de diâmetro para promover sua desaceleração. Esse é o único mecanismo de retardo utilizado para trazer o avião ao repouso. Encontre **(a)** o tempo necessário para desacelerar o avião de 70 m/s para 20 m/s; e **(b)** a distância percorrida pelo avião no intervalo de tempo determinado em (a).

■ Problema 18 (Economia com Design Aerodinâmico I)

(a) Um ônibus viaja a 80 km/hr em condições atmosféricas usuais. A área frontal do veículo é 7.5 m^2 e o coeficiente de arrasto é 0.92. Qual é a potência necessária para superar o arrasto aerodinâmico que se opõe ao movimento do ônibus? Estime a velocidade máxima sabendo que seu motor desenvolve 465 hp.

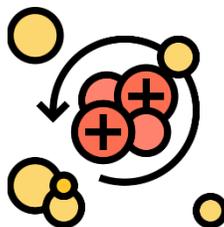
(b) Um engenheiro propõe equipar o ônibus com uma capota aerodinâmica que, de acordo com simulações em túnel de vento, iria reduzir o coeficiente de arrasto do ônibus para 0.86 sem afetar as dimensões da área frontal. Para o ônibus com capota, qual seria a potência necessária quando o ônibus está a 80 km/hr? Qual seria a nova velocidade máxima? Sabendo que são necessários R\$ 1200 diariamente para manter o ônibus em operação, quanto tempo de operação é necessário até que o ônibus com capota compense o valor da modificação? Note que a instalação da capota custou R\$ 18,000. Use $\rho_a = 1.225 \text{ kg/m}^3$ como a densidade do ar.

■ Problema 19 (Lei de Stokes e Eletroforese)

Considere uma partícula esférica negativamente carregada de raio a e carga q_s , suspensa em um meio dielétrico. Quando submetida a um campo elétrico \vec{E}_∞ , a partícula irá transladar sob efeito da força elétrica nela exercida. Esse tipo de deslocamento eletro-hidrodinâmico é o princípio da *eletroforese*, técnica utilizada, por exemplo, na análise de suspensões coloidais. Ao ser exposta ao supracitado campo \vec{E}_∞ , a partícula será resistida por uma força de arrasto.

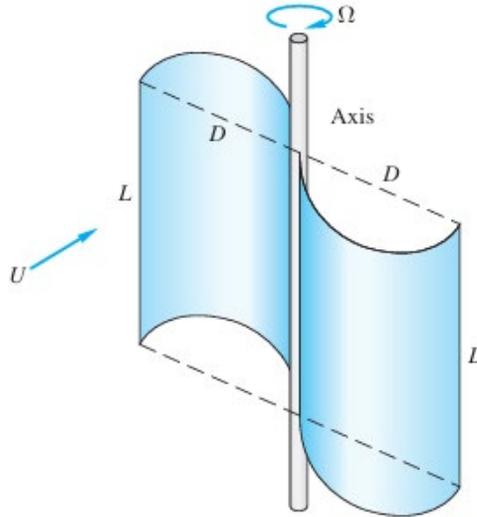
(a) Supondo que a lei de Stokes é válida e que as únicas duas forças exercidas na partícula são a força elétrica inerente ao campo \vec{E}_∞ e o arrasto hidrodinâmico D , encontre uma expressão para a velocidade de translação da esfera.

(b) Calcule as velocidades de translação de duas partículas de raio $a = 1 \text{ }\mu\text{m}$ e $15 \text{ }\mu\text{m}$ usando $q_s = -1 \text{ pC}$ (picocoulomb), $|\vec{E}_\infty| = 1 \text{ kV/m}$ e $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.



■ Problema 20 (Turbina de Savonius)

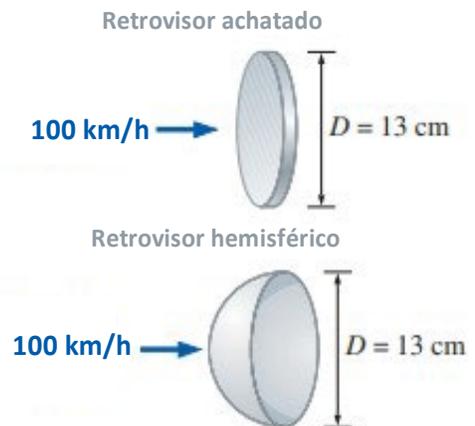
Um rotor de Savonius pode ser representado por duas cascas de cilindro posicionadas em direções opostas, como ilustrado a seguir. Exprima a velocidade de rotação Ω em termos de U , D , L e das propriedades ρ (densidade) e μ (viscosidade dinâmica) do fluido que alimenta a turbina.



■ Problema 21 (Economia com Design Aerodinâmico II)

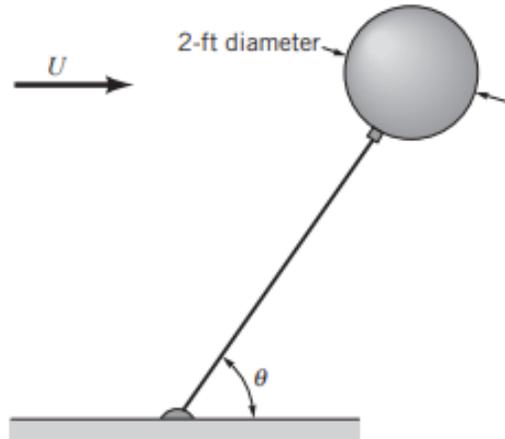
Para reduzir o coeficiente de arrasto e assim aprimorar a eficiência de um veículo, pode-se dimensionar seus retrovisores com formato aerodinâmico. Em um caso hipotético, suponha que uma empresa pondera substituir um retrovisor circular plano por um retrovisor hemisférico, como mostra a figura ao lado. Ambos os modelos têm 13 cm de diâmetro. Supõe-se que o veículo em estudo viaja 24,000 km por ano a uma velocidade de 100 km/h. A densidade e o preço do combustível são respectivamente iguais a 0.75 kg/L e R\$5.60/L.

O valor calorífico da gasolina e a eficiência do motor do veículo são respectivamente iguais a 44,000 kJ/kg e 30%. Calcule a quantidade de combustível e dinheiro economizados por veículo com a substituição do retrovisor.



■ **Problema 22 (Arrasto em um Balão de Hélio)**

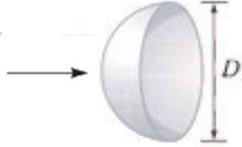
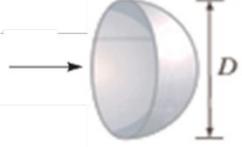
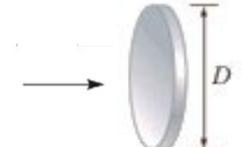
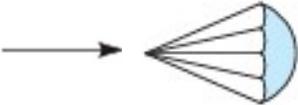
Um balão cheio de hélio deverá ser utilizado como indicador de valocidade. O peso específico do hélio é $\gamma = 0.011 \text{ lb/ft}^3$, a massa do material que constitui o balão é 0.20 lb e o peso do cabo de ancoragem é desprezível. Prepare um gráfico do ângulo θ em função de U para $1 \leq U \leq 50 \text{ mph}$. Use $\rho_w = 0.00238 \text{ slug/ft}^3$ e $\gamma_w = 0.0763 \text{ lb/ft}^3$ como a densidade e o peso específico do ar em unidades imperiais. Ademais, use $\nu = 1.57 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{s}$ como a viscosidade cinemática do ar.



■ **Informações Adicionais**

Tabela 1. Coeficientes de arrasto para diversas geometrias.

| Geometria | C_D |
|------------------------------------|-------------|
| <p>Cubo</p> | 1.07 |
| <p>Cubo</p> | 0.81 |
| <p>Triângulo Equilátero</p> | 1.6 |
| <p>Triângulo Equilátero</p> | 2.0 |

| Geometria | C_D |
|---|-------------------|
| <p>Hemisfério</p>  | <p>0.4</p> |
| <p>Hemisfério</p>  | <p>1.2</p> |
| <p>Placa Circular ou Elíptica Fina</p>  | <p>1.1</p> |
| <p>Paraquedas</p>  | <p>1.2</p> |
| <p>Meio Tubo</p>  | <p>1.2</p> |
| <p>Meio Tubo</p>  | <p>2.3</p> |

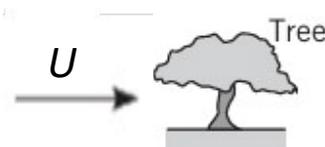
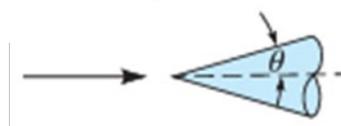
| Geometria | C_D |
|--|--|
| <p>Árvore</p>  | <p>$U = 10 \text{ m/s} \rightarrow C_D = 0.43$ $U = 20 \text{ m/s} \rightarrow C_D = 0.26$ $U = 30 \text{ m/s} \rightarrow C_D = 0.20$</p> |
| <p>Cone</p>  | <p>$\theta = 10^\circ \rightarrow C_D = 0.30$ $\theta = 20^\circ \rightarrow C_D = 0.40$ $\theta = 30^\circ \rightarrow C_D = 0.55$ $\theta = 40^\circ \rightarrow C_D = 0.65$ $\theta = 60^\circ \rightarrow C_D = 0.80$ $\theta = 75^\circ \rightarrow C_D = 1.05$ $\theta = 90^\circ \rightarrow C_D = 1.15$</p> |

Figura 1. Variação da relação arrasto-número de Reynolds para diferentes valores de rugosidade relativa ϵ/D .

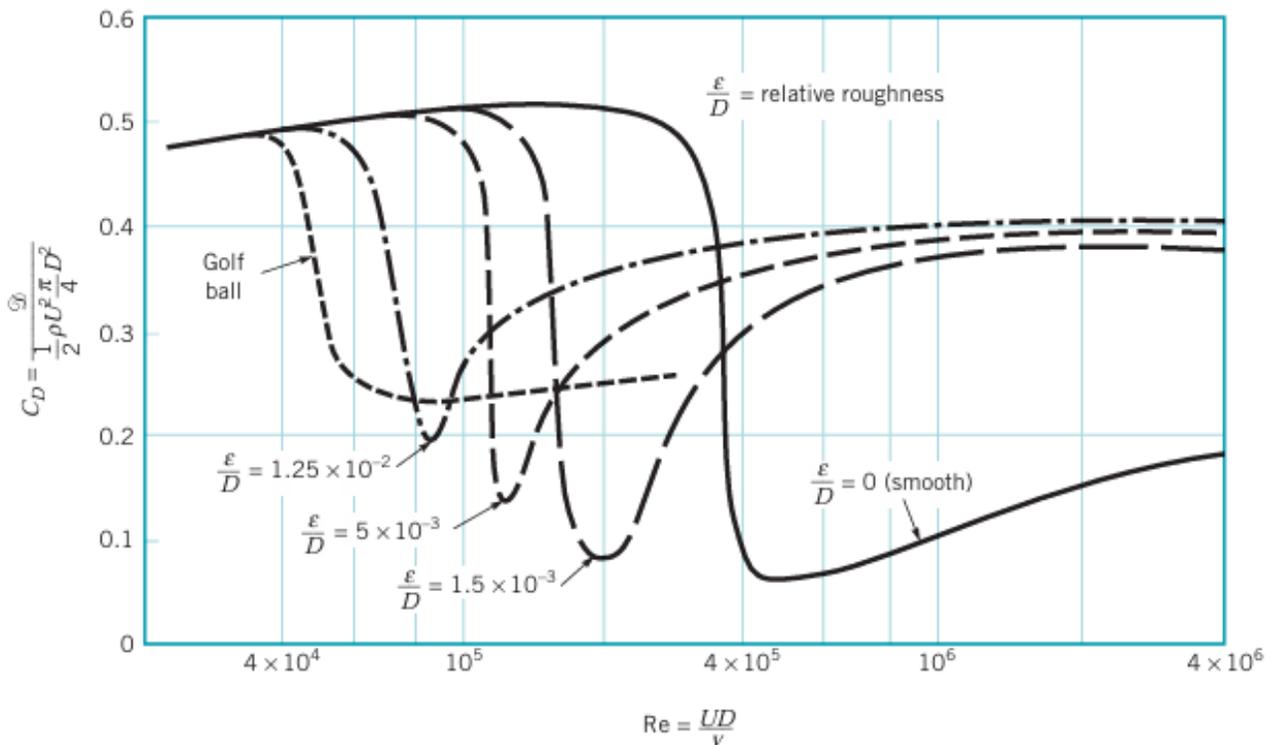


Figura 2

Coeficiente de arrasto *versus* número de Reynolds para uma esfera lisa.

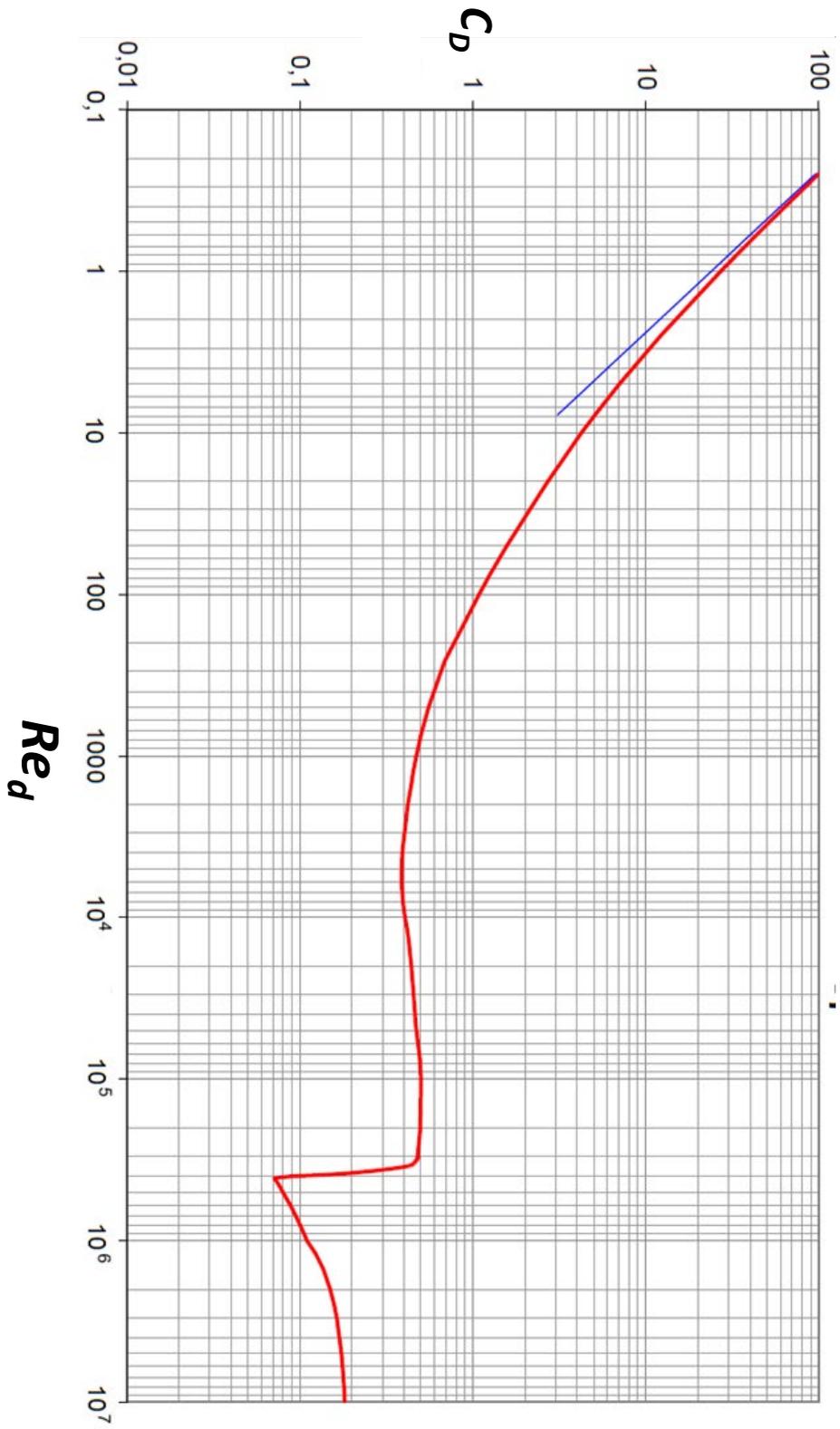
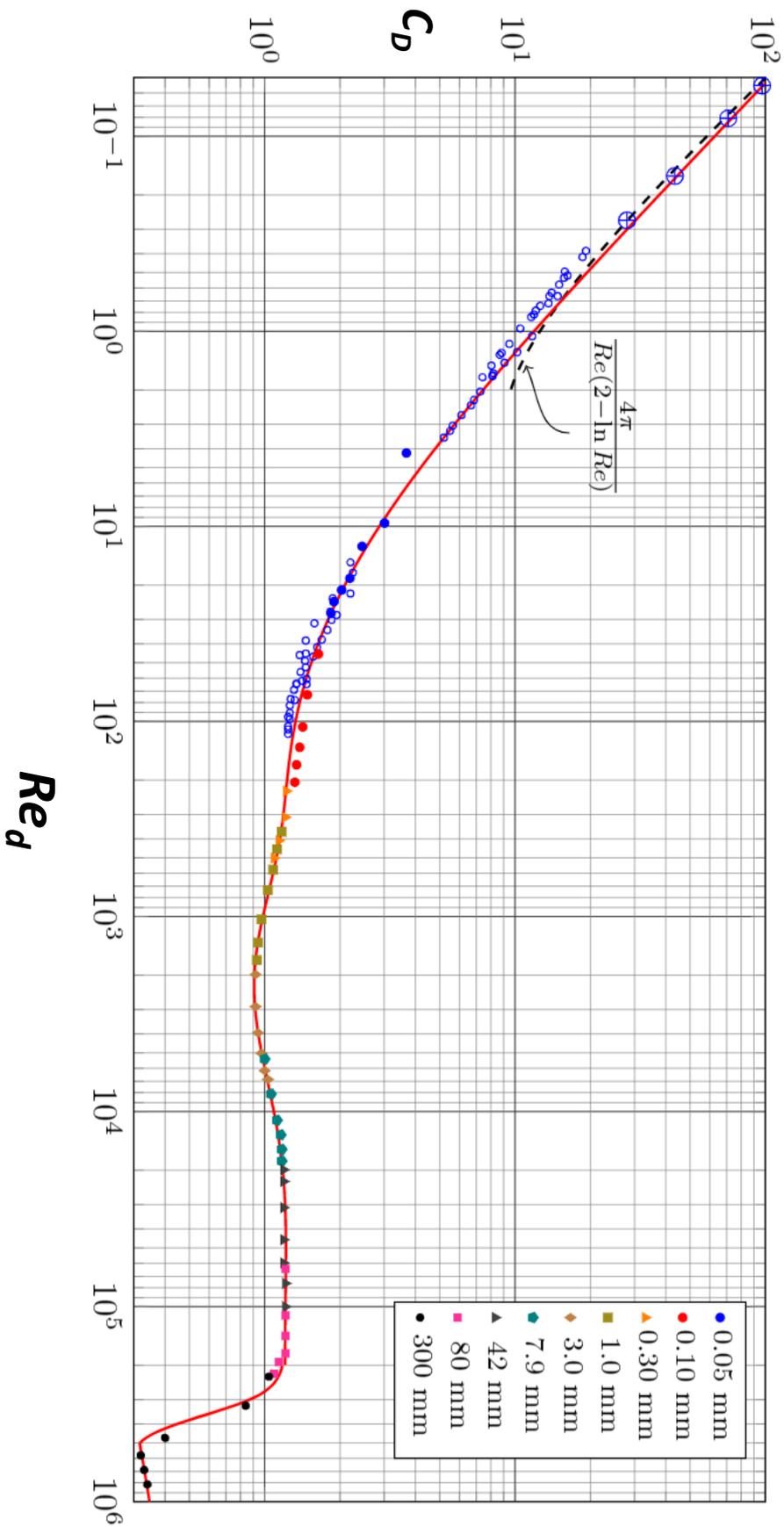


Figura 3

Coeficiente de arrasto *versus* número de Reynolds para um cilindro liso.



■ Soluções

■ Prob. 1

Para ar sob condições normais no nível do mar, $\rho \approx 1.225 \text{ kg/m}^3$. Lembrando que o coeficiente de arrasto é dado pela razão entre a força de arrasto D e o produto $(\frac{1}{2})\rho V^2 S$, temos, no presente caso,

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = \frac{220}{\frac{1}{2} \times 1.225 \times (90/3.6)^2 \times (1.25 \times 1.65)} = \boxed{0.279}$$

■ Prob. 2

Considere primeiramente o caso (a). Como de praxe, o arrasto na placa plana é dado por

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} \quad \text{(I)}$$

onde $A = \ell^2$ e o coeficiente de arrasto por atrito é

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}}$$

Substituindo em **(I)**,

$$D_{(a)} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}} \times \frac{\rho U^2 \times \ell^2}{2} = 0.664 \rho \sqrt{\nu} U^{\frac{3}{2}} \ell^{\frac{3}{2}} \quad \text{(II)}$$

Considerando agora o caso (b), sabemos que a nova área A é

$$A = (4\ell) \times \left(\frac{\ell}{4}\right) = \ell^2$$

ao passo que o coeficiente de arrasto por atrito é

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U \times (4\ell)}{\nu}}} = \frac{1}{2} \times \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}}$$

Substituindo em **(I)**,

$$D_{(b)} = \frac{1}{2} \times \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}} \times \frac{\rho U^2 \times \ell^2}{2} = 0.332 \rho \sqrt{\nu} U^{\frac{3}{2}} \ell^{\frac{3}{2}} \quad \text{(III)}$$

Comparando (II) e (III), vem

$$D_{(b)} = \frac{D_{(a)}}{2}$$

■ Prob. 3

Primeiramente, calculamos o número de Reynolds do escoamento de ar,

$$Re_L = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{1.184 \times 7 \times 0.6}{1.85 \times 10^{-5}} = 268,800$$

Esse valor é inferior ao Reynolds crítico $Re_L \approx 500,000$ e atesta que o escoamento pode ser suposto linear. Segue que o coeficiente de atrito pode ser determinado como

$$C_f = \frac{1.328}{Re_L^{0.5}} = \frac{1.328}{268,800^{0.5}} = 0.00256$$

e o arrasto correspondente é

$$F_D = C_f \frac{\rho V^2 S}{2} = 0.00256 \times \frac{1.184 \times 7^2 \times (2 \times 0.6 \times 0.6)}{2} = 0.0535 \text{ N}$$

(O multiplicador 2 que aparece no lugar de 5 foi incluído porque os dois lados da placa estão expostos ao escoamento de ar.) Portanto, para que o sistema esteja em equilíbrio precisamos acrescentar um contrapeso com peso igual a 0.0535 N. Para tanto, utiliza-se uma massa m tal que

$$m = \frac{F_D}{g} = \frac{0.0535}{9.81} = 0.00545 \text{ kg} = \boxed{5.45 \text{ g}}$$

Basta inserir uma pequena massa de aproximadamente 5.5 gramas para restaurar o equilíbrio do sistema.

■ Prob. 4

Sabendo que $V = 45 \text{ km/h} = 12.5 \text{ m/s}$, começamos com o cálculo do número de Reynolds,

$$Re_L = \frac{\rho_w VL}{\mu} = \frac{1000 \times 12.5 \times 2}{1.14 \times 10^{-3}} = 2.19 \times 10^7$$

Como esse Re_L é significativamente maior que o intervalo usual (300,000 → 500,000) associado a escoamentos externos laminares, conclui-se que o escoamento é turbulento. Assim sendo, podemos calcular o coeficiente de atrito como

$$C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} = \frac{0.074}{(2.19 \times 10^7)^{1/5}} = 0.00252$$

e o arrasto por atrito é

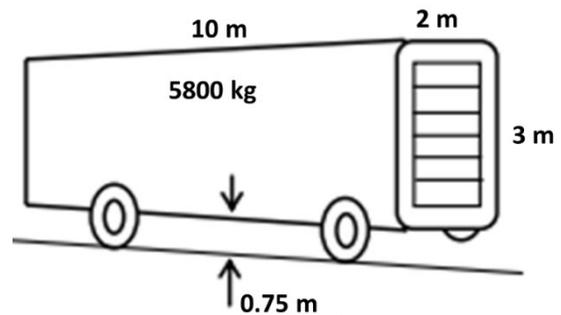
$$D = C_f \times \frac{\rho V^2 S}{2} = 0.00252 \times \frac{1000 \times 12.5^2 \times (1.5 \times 2)}{2} = \boxed{591 \text{ N}}$$

Por fim, a potência Π necessária para vencer o arrasto em questão é

$$\Pi = DV = 591 \times 12.5 = 7390 \text{ W} = \boxed{7.39 \text{ kW}}$$

■ Prob. 5

Quando o caminhão começar a tombar, as rodas no lado carregado pelo vento serão as primeiras a perder contato com a terra, e as forças de reação remanescentes estarão concentradas nas rodas do lado oposto. Somando momentos relativamente às rodas ainda em contato com o chão, podemos escrever



$$\Sigma M_{\text{rodas}} = 0$$

$$\therefore F_{\text{Vento}} \times \left(0.75 + \frac{3.0}{2} \right) - W \times 1.0 = 0$$

$$\therefore 2.25 F_{\text{Vento}} - W = 0$$

$$\therefore F_{\text{Vento}} = \frac{W}{2.25}$$

$$\therefore F_{\text{Vento}} = \frac{5800 \times 9.81}{2.25} = 25,300 \text{ N} = 25.3 \text{ kN}$$

O coeficiente de arrasto de uma superfície retangular exposta a um escoamento perpendicular à sua face é suposto igual a 2.2; Fazendo $F_{\text{Vento}} = F_D$ e resolvendo para a velocidade V , tem-se

$$F_{\text{Vento}} = F_D = C_D \frac{\rho V^2 S}{2} \rightarrow V = \sqrt{\frac{2F_{\text{Vento}}}{C_D \rho S}}$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{2 \times 25,300}{2.2 \times 1.225 \times (10 \times 3)}} = 25.0 \text{ m/s} = \boxed{90 \text{ km/h}}$$

Um vento lateral de 90 km/h é suficiente para fazer o caminhão tombar.

■ Prob. 6

O torque máximo ocorre quando os recipientes estão posicionados perpendicularmente à direção do vento, uma vez que neste caso teremos o maior braço de alavanca entre os recipientes e a articulação. Para um hemisfério oco, temos $C_D = 0.4$ quando o lado convexo está exposto ao vento e $C_D = 1.2$ quando o lado côncavo está exposto ao vento (Tabela 1). Podemos utilizar tais coeficientes para estimar o arrasto nos dois recipientes. Observando que $S = \pi d^2/4 = \pi \times 0.08^2/4 = 0.00503 \text{ m}^2$ e tomando $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$ como a densidade do ar a 25°C , temos

$$D_{\text{convexo}} = C_{D,\text{cvx}} \frac{\rho V^2 S}{2} = 0.4 \times \frac{1.184 \times 20^2 \times 0.00503}{2} = 0.476 \text{ N}$$

$$D_{\text{côncavo}} = C_{D,\text{cnc}} \frac{\rho V^2 S}{2} = 1.2 \times \frac{1.184 \times 20^2 \times 0.00503}{2} = 1.43 \text{ N}$$

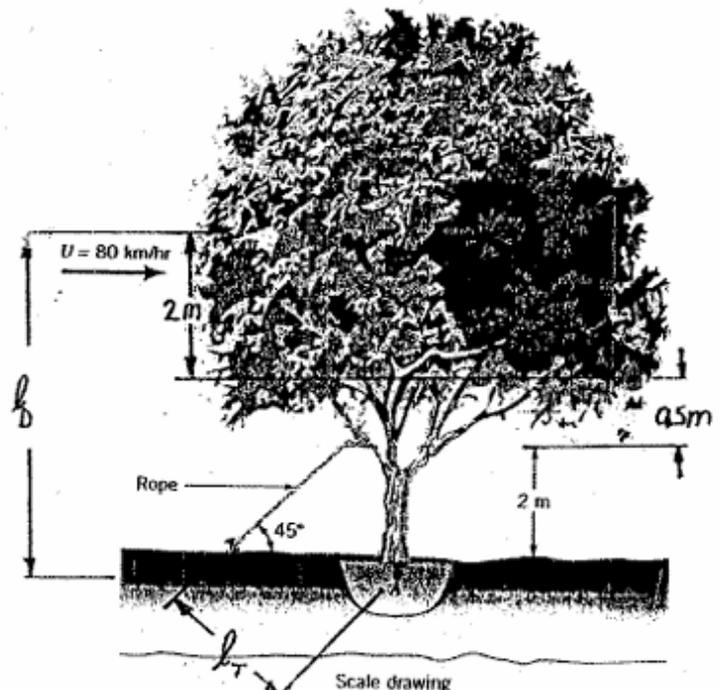
O braço de alavanca de ambas as forças é $L = 60/2 = 30 \text{ cm}$. O torque aplicado na articulação é dado por

$$M_{\text{max}} = D_{\text{côncavo}} L - D_{\text{convexo}} L = (D_{\text{côncavo}} - D_{\text{convexo}}) L$$

$$\therefore M_{\text{max}} = (1.43 - 0.476) \times \frac{0.6}{2} = \boxed{25.8 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

■ Prob. 7

O esboço da árvore é repetido ao lado.



As forças relevantes são o arrasto D imposto pelo vento e a tensão T na corda. Usando as distâncias ℓ_D e ℓ_T indicadas acima, podemos somar momentos em relação a A e isolar a tensão desejada T ,

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow D\ell_D - T\ell_T = 0$$

$$\therefore T = \frac{D\ell_D}{\ell_T}$$

Substituindo o arrasto D ,

$$T = \frac{C_D(\rho U^2 S/2)\ell_D}{\ell_T} \quad \text{(I)}$$

Temos $\rho \approx 1.225 \text{ kg/m}^3$, $U = 80 \text{ km/hr} = 22.2 \text{ m/sec}$, $C_D \approx 0.26$ (Tabela 1), $\ell_T = 3/\sqrt{2} = 2.12 \text{ m}$, $\ell_D = (2 + 2.5 + 0.5) = 5.0 \text{ m}^2$ e $S = \pi \times 5.0^2/4 = 19.6 \text{ m}^2$. Substituindo em (I), vem

$$T = \frac{0.26 \times (1.225 \times 22.2^2 \times 19.6/2) \times 5.0}{2.12} = 3640 \text{ N} = \boxed{3.64 \text{ kN}}$$

■ Prob. 8

Como mostra o diagrama de corpo livre ilustrado ao lado, três forças verticais atuam em uma gota de óleo típica: o peso W , o arrasto D e o empuxo hidrostático F_B . O peso W pode ser escrito como

$$W = mg = \rho_o \forall g$$

onde ρ_o é a densidade do óleo e \forall é o volume da gota. O empuxo hidrostático F_B pode ser escrito como

$$F_B = \rho_w \forall g$$

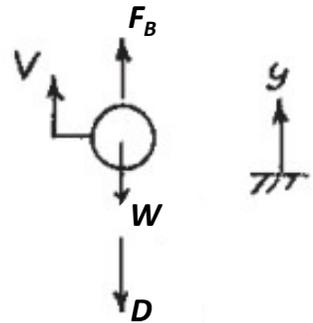
onde ρ_w é a densidade da água. Por fim, o arrasto é dado pela equação de arrasto de Stokes,

$$D = 3\pi\mu V_t d$$

onde μ é a viscosidade do fluido no qual a esfera está imersa (no caso, água), V_t é a velocidade de sedimentação e d é o diâmetro da gota. Somando forças na direção vertical e resolvendo para V_t , vem

$$F_B - W - D = 0$$

$$\therefore \rho_w \forall g - \rho_o \forall g - 3\pi\mu V_t d = 0$$



$$\therefore (\rho_w - \rho_o) \forall g = 3\pi\mu V_t d$$

$$\therefore V_t = \frac{(\rho_w - \rho_o) \forall g}{3\pi\mu d}$$

$$\therefore V_t = \frac{(1 - \overline{SG}) \rho_w \forall g}{3\pi\mu d}$$

Mas o volume de uma esfera é $\forall = \pi d^3/6$; substituindo acima,

$$V_t = \frac{(1 - \overline{SG}) \rho_w \times \pi d^3 \times g}{6 \times 3\pi\mu d}$$

$$\boxed{V_t = \frac{(1 - \overline{SG}) \rho_w g d^2}{18\mu}}$$

A equação destacada é a lei de Stokes para a sedimentação de partículas esféricas em fluidos viscosos. Substituindo $\overline{SG} = 0.85$, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ e $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, vem

$$V_t = \frac{(1 - 0.85) \times 1000 \times 9.81 \times d^2}{18 \times 10^{-3}} = 81,750 d^2$$

$$\therefore V_t [\text{m/s}] = 81,750 (d [\text{m}])^2$$

A expressão acima fornece a velocidade sedimentação em m/s para um dado diâmetro de gota de óleo em m; como o enunciado do problema solicitou expressar a velocidade como função do diâmetro *em milímetros*, podemos escrever

$$V_t [\text{m/s}] = 4.54 \times 10^6 \times \left(\frac{d [\text{mm}]}{1000} \right)^2 = \boxed{0.0818 (d [\text{mm}])^2}$$

Um escoamento de Stokes como o presente sistema somente é válido para números de Reynolds muito pequenos; um limiar tipicamente utilizado é $Re_d < 1$. Pois bem, igualamos o número de Reynolds a 1 e resolvemos para o diâmetro d ,

$$Re_d < 1 \rightarrow \frac{\rho_w V_t d}{\mu} < 1$$

$$\therefore \frac{(1 - \overline{SG}) \rho_w^2 g d^3}{18\mu^2} < 1$$

$$\begin{aligned} \therefore d^3 &< \frac{18\mu^2}{(1-SG)\rho_w^2 g} \\ \therefore d &< \left[\frac{18\mu^2}{(1-SG)\rho_w^2 g} \right]^{\frac{1}{3}} \\ \therefore d &< \left[\frac{18 \times (10^{-3})^2}{(1-0.85) \times 1000^2 \times 9.81} \right]^{\frac{1}{3}} = 2.30 \times 10^{-4} \text{ m} \\ \therefore &\boxed{d < 0.23 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Isto é, para que a lei de Stokes seja válida devemos ter gotas com diâmetro inferior a 0.23 mm.

■ Prob. 9

Recorrendo ao *Engineering Toolbox* ou alguma outra fonte conveniente, verificamos que a densidade e viscosidade do ar ao nível do mar e 25°C são respectivamente 1.184 kg/m³ e 1.849×10⁻⁵ Pa·s. Podemos calcular a velocidade de sedimentação diretamente com a lei de Stokes (vide problema 8),

$$V_t = \frac{(\rho_p - \rho_a)gd^2}{18\mu} = \frac{(2100 - 1.184) \times 9.81 \times (0.1 \times 10^{-3})^2}{18 \times (1.849 \times 10^{-5})} = \boxed{0.6186 \text{ m/s}}$$

Observe que a influência do ar sobre a velocidade de sedimentação é ínfima; de fato, se tivéssemos $\rho_a \approx 0$ o valor de V_t seria quase o mesmo,

$$V_t = \frac{(\rho_p - \rho_a)gd^2}{18\mu} = \frac{(2100 - 0) \times 9.81 \times (0.1 \times 10^{-3})^2}{18 \times (1.849 \times 10^{-5})} = 0.61898 \text{ m/s}$$

Calculamos também o número de Reynolds do escoamento,

$$\text{Re}_d = \frac{\rho_a V_t d}{\mu} = \frac{1.184 \times 0.6186 \times (0.1 \times 10^{-3})}{1.849 \times 10^{-5}} = 3.96$$

Em geral, o escoamento de Stokes é válido para números de Reynolds da ordem de 1 ou menor; como o presente resultado é da ordem de grandeza de 1, concluímos que a análise precedente é válida.

■ **Prob. 10**

Para que o sistema comece a girar no sentido horário, a soma de momentos ΣM_o em relação ao suporte O deve ser menor que zero. Sendo D_1 o arrasto na esfera lisa e D_2 o arrasto na esfera rugosa, deve-se ter

$$-0.3D_1 + 0.5D_2 \leq 0$$

$$\therefore 0.5D_2 \leq 0.3D_1$$

$$\therefore 0.3D_1 \geq 0.5D_2$$

$$\therefore 0.3 \times C_{D1} \times \frac{\rho V_1^2 S_1}{2} \geq 0.5 \times C_{D2} \times \frac{\rho V_2^2 S_2}{2}$$

Mas, sendo $V_1 = V_2 = U$ e $S_1 = S_2 = S$,

$$0.3 \times C_{D1} \times \frac{\rho V_1^2 S_1}{2} \geq 0.5 \times C_{D2} \times \frac{\rho V_2^2 S_2}{2}$$

$$\therefore 0.3 \times C_{D1} \times \frac{\cancel{\rho V_1^2 S_1}}{2} \geq 0.5 \times C_{D2} \times \frac{\cancel{\rho V_2^2 S_2}}{2}$$

$$\therefore 0.3C_{D1} \geq 0.5C_{D2}$$

No caso limite, a desigualdade torna-se uma igualdade e temos

$$0.3C_{D1} = 0.5C_{D2} \rightarrow C_{D2} = 0.6C_{D1}$$

De antemão, não temos nem o coeficiente de arrasto C_{D1} nem o coef. de arrasto C_{D2} ; todavia, podemos determiná-los por tentativa e erro. Primeiramente, supõe-se um número de Reynolds Re_d ; em seguida, entramos com esse valor no gráfico da Figura 1 para ler o coeficiente de arrasto da esfera lisa (esfera 1) e o coeficiente de arrasto da esfera rugosa (esfera 2); repete-se até que $C_{D2} \approx 0.6C_{D1}$; o Reynolds para o qual essa igualdade é satisfeita pode então ser usado no cálculo da velocidade crítica U para a qual o sistema começará a girar. Os resultados do procedimento proposto são tabelados a seguir.

| Re_d | C_{D1} (Fig. 1) | C_{D2} (Fig. 1) | C_{D2}/C_{D1} |
|---------|-------------------|-------------------|---------------------|
| 60,000 | 0.5 | 0.46 | 0.92 |
| 100,000 | 0.52 | 0.27 | 0.52 |
| 80,000 | 0.5 | 0.21 | 0.42 |
| 70,000 | 0.5 | 0.29 | 0.58 \approx 0.60 |

O Reynolds que produz uma razão de coefs. de arrasto mais próxima de 0.60 é $Re_d \approx 70,000$. Aceitamos esse valor e prosseguimos ao cálculo da velocidade U ,

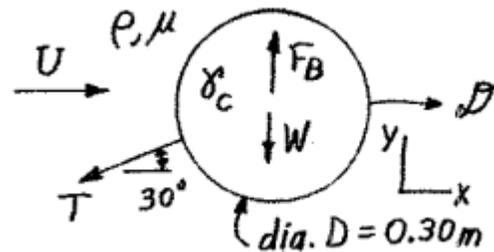
$$Re_d = 70,000 \rightarrow \frac{\rho U d}{\mu} = 70,000$$

$$\therefore U = \frac{70,000 \mu}{\rho d}$$

$$\therefore U = \frac{70,000 \times (1.8 \times 10^{-5})}{1.225 \times 0.1} = 10.3 \text{ m/s} = \boxed{37.1 \text{ km/h}}$$

■ Prob. 11

Como mostra o diagrama de corpo livre ao lado, as forças que atuam sobre a bola são o peso W , o empuxo hidrostático F_B , a tração T e o arrasto D . Escrevendo um equilíbrio de forças na horizontal (direção x), temos



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\therefore D - T \cos 30^\circ = 0$$

$$\therefore T = \frac{D}{\cos 30^\circ} \quad \text{(I)}$$

Na vertical (direção y), por sua vez, temos

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_B - W - T \sin 30^\circ = 0$$

$$\therefore F_B = W + T \sin 30^\circ$$

Usando (I),

$$F_B = W + \frac{D}{\cos 30^\circ} \times \sin 30^\circ$$

$$\therefore F_B = W + D \tan 30^\circ \quad \text{(II)}$$

O empuxo hidrostático é

$$F_B = \gamma_{\text{água}} \nabla = 9810 \times \frac{4\pi}{3} \times (0.3/2)^3 = 139 \text{ N}$$

e o peso da bola é

$$W = \gamma_{\text{cortiça}} \nabla = (0.21 \times 9810) \times \frac{4\pi}{3} \times (0.3/2)^3 = 29.1 \text{ N}$$

Substituindo em **(II)**,

$$F_B = W + D \tan 30^\circ \rightarrow 139 = 29.1 + D \times \tan 30^\circ$$

$$\therefore D = \frac{139 - 29.1}{\tan 30^\circ} = 190 \text{ N}$$

No entanto, sabemos que o arrasto D também é dado por

$$D = C_D \times \frac{\rho U^2 S}{2}$$

Substituindo os valores conhecidos e resolvendo para U ,

$$190 = C_D \times \frac{1000 \times U^2 \times \left[(\pi/4) \times 0.15^2 \right]}{2}$$

$$\therefore 190 = 35.3 C_D U^2$$

$$\therefore C_D U^2 = 5.38 \quad \textbf{(III)}$$

Exprimimos o número de Reynolds em termos da velocidade U ,

$$\text{Re}_d = \frac{Ud}{\nu} = \frac{U \times 0.3}{1.12 \times 10^{-6}} = 268,000U \quad \textbf{(IV)}$$

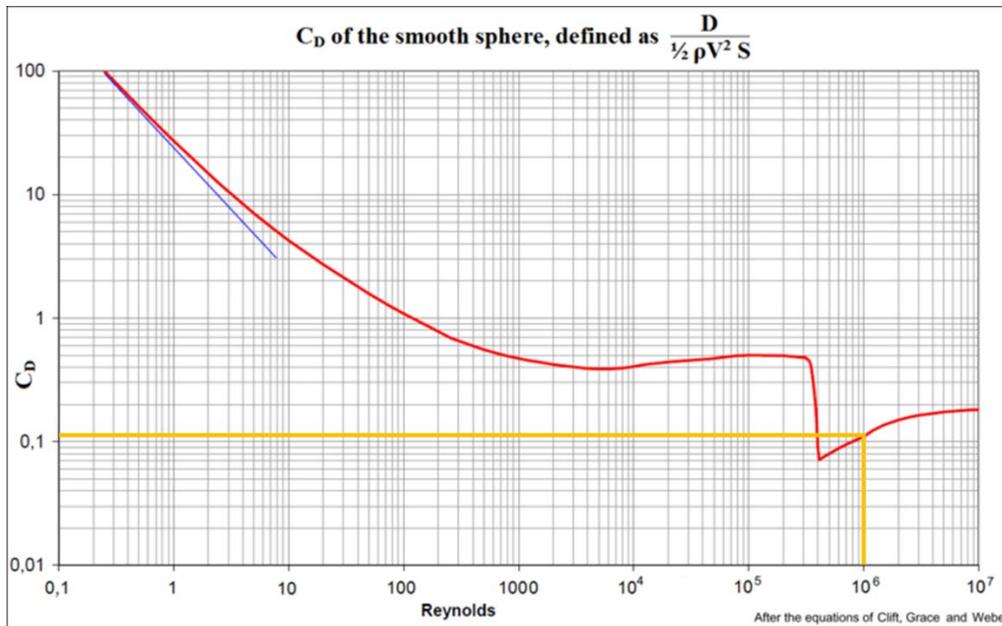
Para determinar a velocidade U , procedemos de maneira algorítmica: (1) Primeiramente, atribuímos um valor arbitrário ao coeficiente de arrasto C_D ; (2) depois, calculamos U a partir de **(III)**; (3) em seguida, estimamos o número de Reynolds com **(IV)**; (4) por fim, obtemos o coeficiente de arrasto por meio do gráfico da Figura 2. Repete-se o processo até que o coef. de arrasto proposto no passo (1) coincida com o coef. de arrasto obtido no passo (4). Ilustramos o processo supondo que $C_D = 0.4$. Substituindo em **(III)**, vem

$$U = \sqrt{\frac{5.38}{C_D}} = \sqrt{\frac{5.38}{0.4}} = 3.67 \text{ m/s}$$

Inserindo U em **(IV)**, vem

$$\text{Re}_d = 268,000 \times 3.67 = 984,000$$

Entrando com esse valor no gráfico da Figura 2, lê-se $C_D \approx 0.11$, como mostram as linhas amarelas a seguir. Uma vez que o C_D suposto, 0.40, é diferente do C_D obtido no passo 4, o resultado está incorreto e uma nova iteração é necessária.



A tabela a seguir resume os resultados obtidos em sucessivas iterações. O C_D ótimo é ~ 0.19 e a velocidade da corrente correspondente é $U = 5.31$ m/s.

| C_D suposto | Velocidade U (m/s) | No. de Reynolds Re_d | C_D no gráfico |
|---------------|----------------------|------------------------|------------------|
| 0.4 | 3.67 | 268,000 | 0.11 |
| 0.5 | 3.27 | 876,000 | 0.15 |
| 0.15 | 5.97 | 1.60×10^6 | 0.20 |
| 0.19 | 5.31 | 1.42×10^6 | 0.19 (Certo!) |

■ Prob. 12

Tem-se aqui um problema fácil mas trabalhoso. Devemos calcular quatro contribuições para o arrasto total, quais sejam, (1) um cilindro de 15 ft de altura e 1 ft de diâmetro; (2) um cilindro de 15 ft de altura e 0.8 ft de diâmetro; (3) um cilindro com 15 ft de altura e 0.6 ft de diâmetro; e (4) um elipsoide de eixo maior igual a 16 ft e eixo menor igual a 5 ft. As quatro superfícies estão expostas ao mesmo escoamento de vento com velocidade $V = 50$ mph = 73.3 ft/s.

1. *Cilindro 1*: A área frontal do cilindro 1 é $A_f = 1.0 \times 15 = 15$ ft². O número de Reynolds Re_{d1} é

$$Re_{d1} = \frac{Vd_1}{\nu} = \frac{73.3 \times 1.0}{1.56 \times 10^{-4}} = 470,000$$

Entrando com esse valor no gráfico da Figura 3, lê-se um coeficiente de arrasto $C_{D1} \approx 0.25$.

2. *Cilindro 2*: A área frontal do cilindro 2 é $A_2 = 0.8 \times 15 = 12 \text{ ft}^2$. O número de Reynolds Re_{d2} é

$$Re_{d2} = \frac{Vd_2}{\nu} = \frac{73.3 \times 0.8}{1.56 \times 10^{-4}} = 376,000$$

Entrando com esse valor no gráfico da Figura 3, lê-se um coeficiente de arrasto $C_{D2} \approx 0.5$.

3. *Cilindro 3*: A área frontal do cilindro 3 é $A_3 = 0.6 \times 15 = 9 \text{ ft}^2$. O número de Reynolds Re_{d3} é

$$Re_{d3} = \frac{Vd_3}{\nu} = \frac{73.3 \times 0.6}{1.56 \times 10^{-4}} = 282,000$$

Entrando com esse valor no gráfico da Figura 3, lê-se um coeficiente de arrasto $C_{D3} \approx 0.6$.

4. *Placa elíptica*: A placa elíptica tem área frontal dada por $A_4 = \pi \times \text{semieixo menor} \times \text{semieixo maior} = \pi \times 2.5 \times 8 = 62.8 \text{ ft}^2$. Recorrendo à Tabela 1, verificamos que o coeficiente de arrasto de um disco fino circular ou elíptico pode ser suposto igual a 1.1. Temos agora todas as informações necessárias para determinar o arrasto total no sistema,

$$D = \frac{\rho V^2}{2} \Sigma (C_D A) = \frac{0.00238 \times 73.3^2}{2} \times \left(\begin{array}{l} 0.25 \times 15 + 0.5 \times 12 \\ + 0.6 \times 9 + 1.1 \times 62.8 \end{array} \right) = \boxed{539 \text{ lb}}$$

■ Prob. 13

Podemos utilizar $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ como valores de referência para a densidade e viscosidade dinâmica do ar, respectivamente. O número de Reynolds do escoamento é

$$Re_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1.225 \times (40/3.6) \times 0.2}{1.8 \times 10^{-5}} = 151,200$$

Entrando com esse número no gráfico da Figura 3, lê-se $C_D \approx 1.2$. Ademais, a área frontal do cilindro na direção normal ao vento é $S = 2 \times 0.2 = 0.4 \text{ m}^2$. Segue que o arrasto total exercido no tronco é

$$F_D = C_D \frac{\rho V^2 S}{2} = 1.2 \times \frac{1.225 \times (40/3.6)^2 \times 0.4}{2} = 36.3 \text{ N}$$

A força peso do tronco é

$$W = mg = \rho g \nabla = \rho g \frac{\pi D^2 L}{4} = 513 \times 9.81 \times \frac{\pi \times 0.2^2 \times 2}{4} = 316 \text{ N}$$

A resultante no tronco e o ângulo que ela subtende com a horizontal são dados por

$$F_{\text{tronco}} = \sqrt{W^2 + F_D^2} = \sqrt{316^2 + 36.3^2} = \boxed{318 \text{ N}}$$

$$\tan \theta = \frac{W}{F_D} = \frac{318}{36.3} = 8.76$$

$$\therefore \theta = \arctan(8.76) = \boxed{83.5^\circ}$$

Ao desenhar um diagrama de corpo livre, é fácil concluir que a tração no cabo deve ser igual à resultante que atua no tronco. Assim sendo, a tensão no cabo é 318 N e o cabo subtende um ângulo de 84° com a horizontal.

■ Prob. 14

A densidade e viscosidade dinâmica do ar a 80°C são aproximadamente iguais a $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ $\mu = 2.096 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Iniciamos a solução com o cálculo do arrasto na haste cilíndrica. O número de Reynolds associado ao escoamento de ar ao redor do cilindro é

$$\text{Re}_{d,\text{haste}} = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1.0 \times 45 \times 0.005}{2.096 \times 10^{-5}} = 10,700$$

Entrando com esse número de Reynolds no gráfico da Figura 3, extraímos um coeficiente de arrasto $C_D \approx 1.1$. A área da projeção do cilindro na direção perpendicular ao escoamento é $0.005 \times 0.2 = 0.001 \text{ m}^2$. O arrasto correspondente é dado por

$$D_{\text{cil}} = C_D \times \frac{\rho V^2 S}{2} = 1.11 \times \frac{1.0 \times 45^2 \times 0.001}{2} = 1.12 \text{ N}$$

Lembrando que a força D_{cil} está concentrada na metade da altura do cilindro, temos o momento

$$M_{\text{cil}} = 1.12 \times \left(\frac{20}{2} \right) = 11.2 \text{ N}\cdot\text{cm}$$

Considere agora o cone. O braço de alavanca entre o centroide da área projetada do cone e a base do sistema é $20 \text{ cm} + 1.5 \text{ cm} = 21.5 \text{ cm}$. Não temos o coeficiente de arrasto do cone, mas podemos exprimir a força de arrasto em função dele,

$$D_{\text{cone}} = C_{D,\text{cone}} \times \frac{\rho V^2 S}{2} = C_{D,\text{cone}} \times \frac{1.0 \times 45^2 \times (\pi \times 0.03^2 / 4)}{2} = 0.716 C_{D,\text{cone}}$$

Somando momentos em relação à base do sistema e lembrando que $M_{\text{max}} = 24 \text{ N}\cdot\text{cm}$, tem-se

$$\Sigma M_{\text{Base}} \rightarrow 24 = 11.2 + 0.716 C_{D,\text{cone}} \times 21.5$$

$$\therefore C_{D,\text{cone}} = \frac{24 - 11.2}{0.716 \times 21.5} = 0.831$$

Recorrendo à Tabela 1, vê-se que um coeficiente de arrasto da ordem de 0.8 corresponde a um cone com ângulo de abertura igual a 60°. Portanto, para que o momento limite de 24 N·cm seja respeitado devemos utilizar um cone com ângulo de abertura não superior a 60 deg.

■ Prob. 15

O arrasto exercido contra o movimento do ciclista quando este pedala com sua velocidade máxima de 30 km/hr (= 8.33 m/s) é

$$D = C_D \times \frac{\rho U^2 S}{2} = 1.2 \times \frac{1.23 \times 8.33^2 \times 0.25}{2} = 12.8 \text{ N}$$

A potência desenvolvida pelo ciclista é, lembrando de contabilizar a resistência a rolagem $F_R = 7.5 \text{ N}$,

$$\Pi_c = (D + F_R)V = (12.8 + 7.5) \times 8.33 = 169 \text{ W}$$

Supondo agora que o ciclista enfrenta ventos contrários de $V_w = 10 \text{ km/hr} = 2.78 \text{ m/s}$ e tenta pedalar a $24 \text{ km/h} = 6.67 \text{ m/s}$, o arrasto D aumenta e é tal que

$$D = C_D \times \frac{\rho (U + V_w)^2 S}{2} = 1.2 \times \frac{1.23 \times (2.78 + 6.67)^2 \times 0.25}{2} = 16.5 \text{ N}$$

A potência necessária, nesse caso, é

$$\Pi_{\text{vento cont}} = (D + F_R)V = (16.5 + 7.5) \times 6.67 = 160 \text{ W}$$

Uma vez que $\Pi_c = 169 \text{ W} > \Pi_{\text{vento cont}} = 160 \text{ W}$, concluímos que o ciclista de fato é capaz de pedalar a 24 km/h mesmo quando exposto a ventos contrários de 10 km/h. Supondo, em seguida, que o ciclista está sob ventos favoráveis de $V_w = 10 \text{ km/h} = 2.78 \text{ m/s}$ e tenta pedalar a $40 \text{ km/hr} = 11.1 \text{ m/s}$, o arrasto D diminui e é tal que

$$D = C_D \times \frac{\rho (U - V_w)^2 S}{2} = 1.2 \times \frac{1.23 \times (11.1 - 2.78)^2 \times 0.25}{2} = 12.8 \text{ N}$$

A potência necessária, nesse caso, é

$$\Pi_{\text{vento fav}} = (D + F_R)V = (12.8 + 7.5) \times 11.1 = 225 \text{ W}$$

Uma vez que $\Pi_c = 169 \text{ W} < \Pi_{\text{vento fav}} = 225 \text{ W}$, concluímos que o ciclista *não* é capaz de atingir 40 km/h mesmo quando impelido por ventos favoráveis de 10 km/h. Em suma, o ciclista vence a primeira aposta e perde a segunda.

■ Prob. 16

O automóvel é desacelerado pela força F_b dos freios e pelo arrasto F_d fornecido pela área de arrasto do veículo e do paraquedas. Usando $\rho_a = 1.225 \text{ kg/m}^3$ como a densidade do ar e $C_D = 1.2$ como o coeficiente de arrasto do paraquedas (Tabela 1), aplicamos a segunda lei de Newton ao veículo,

$$\Sigma F = -F_b - F_d = m \frac{dV}{dt}$$

$$\therefore -5000 - \frac{1.225}{2} \left(0.4 + 1.2 \times \frac{\pi \times D_p^2}{4} \right) \times V^2 = 1500 \frac{dV}{dt}$$

Dividindo os dois lados por 1500 e separando variáveis,

$$-\int_0^t dt = \int_{V_o}^0 \frac{dV}{\frac{5000}{1500} + \frac{1.225}{2 \times 1500} \left(0.4 + 1.2 \times \frac{\pi \times D_p^2}{4} \right) V^2}$$

Introduzimos a notação abreviada

$$\alpha = \frac{1.225}{2 \times 1500} \left(0.4 + 1.2 \times \frac{\pi \times D_p^2}{4} \right)$$

$$\beta = \frac{5000}{1500}$$

Logo,

$$-\int_0^t dt = \int_{V_o}^0 \frac{dV}{\beta + \alpha V^2} \quad (\text{I})$$

Avaliando a integral do lado direito com o Mathematica,

$$\text{In[316]:= Integrate}\left[\frac{1}{\beta + \alpha * V^2}, \{V, V0, 0\}, \text{Assumptions} \rightarrow V0 > 0\right]$$

$$\text{Out[316]= } -\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ArcTan}\left[V0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right]}{\alpha} \text{ if } \text{Re}\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] \geq 0 \text{ || } V0^2 + \text{Re}\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] \leq 0 \text{ || } \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$\int_{V_0}^0 \frac{dV}{\beta + \alpha V^2} = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \arctan\left(V_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

Substituindo em **(I)**,

$$-\int_0^t dt = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \arctan\left(V_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$\therefore t = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \arctan\left(V_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$\therefore 8 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \arctan\left(V_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

A expressão acima é uma equação transcendental em α , que é o parâmetro no qual está contido o diâmetro D_p do paraquedas. Podemos resolver a equação com o comando *FindRoot* do Mathematica,

```
In[317]:=  $\alpha = \frac{1.225}{2 * 1500} * \left(0.4 + 1.2 * \frac{\text{Pi} * D_p^2}{4}\right);$ 
```

```
In[318]:=  $\beta = \frac{5000}{1500};$ 
```

```
In[319]:=  $V0 = 50;$ 
```

```
In[320]:=  $\text{FindRoot}\left[8 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ArcTan}\left[V0 * \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right], \{Dp, 1.0\}\right]$ 
```

```
Out[320]= {Dp -> 3.88856}
```

O código indica que $D_p \approx 3.89$ m; assim sendo, concluímos que o veículo retornará ao repouso dentro de 8 segundos somente se o paraquedas utilizado tiver cerca de 3.9 m de diâmetro.

■ Prob. 17

Parte (a): Começamos escrevendo a segunda lei de Newton para um deslocamento unidimensional retardado por uma força de arrasto,

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{C_D}{2} \rho V^2 S$$

Separando variáveis,

$$\frac{dV}{V^2} = -\frac{C_D}{2m} \rho S dt$$

Fazendo $K = \Sigma(C_D \rho S/2)$,

$$\frac{dV}{V^2} = -\frac{K}{m} dt$$

Integrando entre $(V_0, 0)$ e (V, t) ,

$$\int_{V_0}^V \frac{dV}{V^2} = -\frac{K}{m} \int_0^t dt$$

$$\therefore \frac{1}{V_0} - \frac{1}{V} = -\frac{K}{m} t$$

$$\therefore V = \frac{V_0}{1 + (K/m)V_0 t}$$

$$\therefore V = \frac{V_0}{1 + \alpha t}$$

onde substituímos $\alpha = KV_0/m$. Podemos integrar o resultado acima em função do tempo para obter a distância percorrida; usando o Mathematica para ganhar tempo, temos

$$\text{In[137]:= Simplify[Integrate[\frac{V_0}{1 + (k/m) * V_0 * t}, t]]]$$

$$\text{Out[137]= } \frac{m \text{Log}[m + k t V_0]}{k}$$

$$\therefore x = \frac{m \ln(m + KV_0 t)}{K}$$

Fazendo $\alpha = KV_0/m$,

$$x = \frac{m \ln(m + KV_0 t)}{K} = \frac{\ln(m + KV_0 t)}{\left(\frac{K}{m}\right)}$$

$$\therefore x = \frac{V_0 \ln(m + KV_0 t)}{\alpha}$$

$$\therefore x = \frac{V_o \ln \left[m(1 + KV_o t/m) \right]}{\alpha}$$

$$\therefore x = \frac{V_o}{\alpha} \ln(1 + \alpha t) \quad \text{(II)}$$

A equação **(I)** descreve a variação da velocidade V ao longo do tempo, ao passo que **(II)** nos dá a distância percorrida ao longo do tempo. No presente caso, o coeficiente K é

$$K = \frac{\rho}{2} \sum C_D S = \frac{1.225}{2} \times \left(8 + 1.20 \times \frac{\pi}{4} \times 3.0^2 \right) = 10.1$$

e, sabendo que a massa m do avião é $m = 50,000/9.81 = 5100$ kg, α é dado por

$$\alpha = \frac{KV_o}{m} = \frac{10.1 \times 70}{5100} = 0.139 \text{ s}^{-1}$$

Note que o coeficiente de arrasto = 1.2 para um paraquedas foi extraído da Tabela 1. Substituindo em **(I)** e resolvendo para o tempo t ,

$$\therefore V = \frac{V_o}{1 + \alpha t} \rightarrow 20 = \frac{70}{1 + 0.139t}$$

$$\therefore \boxed{t = 18 \text{ sec}}$$

O avião será desacelerado ao nível desejado dentro de aproximadamente 18 sec.

Parte (b): Substituindo os valores pertinentes em **(II)**, vem

$$x = \frac{V_o}{\alpha} \ln(1 + \alpha t) = \frac{70}{0.139} \times \ln(1 + 0.139 \times 18) = \boxed{631 \text{ m}}$$

O avião precisa percorrer mais de 600 m para desacelerar de 70 m/s para 20 m/s. Em primeira análise, o uso do paraquedas parece ser um mecanismo de desaceleração ineficiente.

■ Prob. 18

Partes (a) e (b): Primeiramente, com $V = 80 \text{ km/hr} = 22.2 \text{ m/s}$, calculamos o arrasto que atua no ônibus sem capota,

$$D = C_D \times \frac{\rho V^2 S}{2} = 0.92 \times \frac{1.225 \times 22.2^2 \times 7.5}{2} = 2080 \text{ N}$$

A potência associada a esse arrasto é

$$\Pi_D = DV = 2080 \times 22.2 = 46,200 \text{ W} = 46.2 \text{ kW}$$

A potência disponível, por sua vez, é $\Pi_a = 465 \text{ hp} = 346,800 \text{ W} = 346.8 \text{ kW}$. A velocidade máxima associada a esse valor é

$$\Pi_{\max} = \left(C_D \times \frac{\rho V_{\max}^2 S}{2} \right) \times V_{\max} \rightarrow V_{\max} = \left(\frac{\Pi_{\max}}{\frac{1}{2} \rho A C_D} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore V_{\max} = \left(\frac{346,800}{\frac{1}{2} \times 1.225 \times 7.5 \times 0.92} \right)^{\frac{1}{3}} = 43.4 \text{ m/s} = 156 \text{ km/h}$$

Em seguida, repetimos os cálculos acima com $C_D = 0.86$, isto é, com o ônibus já equipado com a capota. O arrasto é

$$D' = 0.86 \times \frac{1.225 \times 22.2^2 \times 7.5}{2} = 1950 \text{ N}$$

A potência correspondente é

$$\Pi'_D = D'V = 1950 \times 22.2 = 43,300 \text{ W} = 43.3 \text{ kW}$$

A velocidade máxima é

$$\therefore V_{\max} = \left(\frac{346,800}{\frac{1}{2} \times 1.225 \times 7.5 \times 0.86} \right)^{\frac{1}{3}} = 44.4 \text{ m/s} = 160 \text{ km/h}$$

Comparando as potências dissipadas antes e após a instalação da capota, temos o ganho

$$\text{Ganho} = \frac{\Pi'_D}{\Pi_D} = \frac{43.3}{46.2} = 0.937 = 93.7\%$$

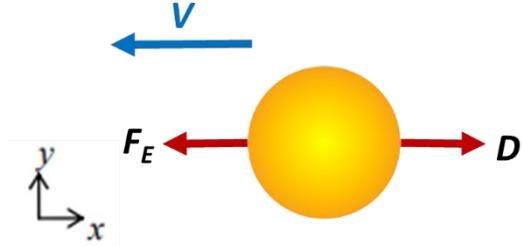
Os gastos em combustível antes da instalação da capota eram R\$ 1200 por dia; após a instalação do equipamento, os gastos caem para $0.937 \times 1200 = \text{R}\1124 . O valor economizado, pois, é $1200 - 1124 = \text{R}\$76/\text{dia}$. Segue que o tempo necessário para balancear os R\$ 18.000 gastos com a capota é

$$\tau = \frac{\text{R}\$ 18.000,00}{\text{R}\$ 76 \text{ dia}^{-1}} = 237 \text{ dias} = \boxed{7.9 \text{ meses}}$$

O investimento será recuperado após cerca de 8 meses de operação com o novo equipamento.

■ Prob. 19

Parte (a): Como mostra o diagrama de corpo livre ao lado, a esfera está sob o efeito de uma força elétrica $F_E = -q_s \times |\vec{E}_\infty|$ e um arrasto hidrodinâmico D dado pela lei de Stokes. (O sinal negativo em F_E ocorre porque a esfera é negativamente carregada.) Escrevendo um equilíbrio de forças na direção x e resolvendo para a velocidade V , temos



$$F_E + D = 0 \rightarrow -q_s |E_\infty| + 6\pi\mu Va = 0$$

$$\therefore q_s |E_\infty| = 6\pi\mu Va$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{q_s |E_\infty|}{6\pi\mu a}}$$

Observe que a velocidade alcançada pela partícula é diretamente proporcional à sua carga q_s e à intensidade $|E_\infty|$ do campo elétrico. Por outro lado, a velocidade da partícula é inversamente proporcional à viscosidade dinâmica μ do fluido e ao raio a da partícula.

Parte (b): Substituindo as variáveis pertinentes, temos, para a partícula de raio $a = 1 \mu\text{m}$,

$$V = \frac{q_s |E_\infty|}{6\pi\mu a} = \frac{(-10^{-12}) \times 1000}{6\pi \times 10^{-3} \times (1 \times 10^{-6})} = -0.0531 \text{ m/s} = \boxed{-53.1 \text{ mm/s}}$$

ao passo que, para a partícula de raio $a = 15 \mu\text{m}$,

$$V = \frac{q_s |E_\infty|}{6\pi\mu a} = \frac{(-10^{-12}) \times 1000}{6\pi \times 10^{-3} \times (15 \times 10^{-6})} = -0.00354 \text{ m/s} = \boxed{-3.54 \text{ mm/s}}$$

■ Prob. 20

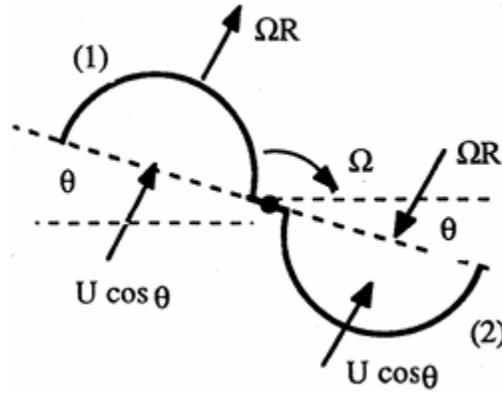
Para qualquer ângulo arbitrário θ (vide figura abaixo), o torque produzido pela velocidade relativa em cada meio-cilindro é igualado a zero (supondo um suporte sem atrito), de modo que

$$T_o = \frac{D}{2}(F_1 - F_2) = 0$$

onde F_1 e F_2 são dados por

$$F_1 = C_{D1} \frac{\rho}{2} \left(U \cos \theta - \frac{\Omega D}{2} \right)^2 DL$$

$$F_2 = C_{D2} \frac{\rho}{2} \left(U \cos \theta + \frac{\Omega D}{2} \right)^2 DL$$



Esse padrão de torques se repete a cada 90 graus. Portanto, o torque tem valor médio

$$T_{o,méd} = 0 \text{ se } F_{1,méd} = F_{2,méd}$$

$$\therefore \frac{\rho}{2} DL C_{D1} \left(U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} \right)_{méd}^2 = \frac{\rho}{2} DL C_{D2} \left(U \cos \theta + \Omega \frac{D}{2} \right)_{méd}^2$$

$$\therefore C_{D1} \left(U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} \right)^2 = C_{D2} \left(U \cos \theta + \Omega \frac{D}{2} \right)^2$$

Introduzindo a notação $\zeta = \sqrt{C_{D2}/C_{D1}}$ e resolvendo para Ω , vem

$$\left(U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} \right)^2 = \frac{C_{D2}}{C_{D1}} \left(U \cos \theta + \Omega \frac{D}{2} \right)^2$$

$$\therefore \left(U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} \right)^2 = \underbrace{\frac{C_{D2}}{C_{D1}}}_{=\zeta^2} \left(U \cos \theta + \Omega \frac{D}{2} \right)^2$$

$$\therefore \sqrt{\left(U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} \right)^2} = \sqrt{\zeta^2 \left(U \cos \theta + \Omega \frac{D}{2} \right)^2}$$

$$\therefore U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} = \zeta \left(U \cos \theta + \Omega \frac{D}{2} \right)$$

$$\therefore U \cos \theta - \Omega \frac{D}{2} = \zeta U \cos \theta + \zeta \frac{D}{2} \Omega$$

$$\therefore U \cos \theta = \zeta U \cos \theta + \frac{D}{2} (\zeta + 1) \Omega$$

$$\therefore \frac{D}{2} (\zeta + 1) \Omega = U (1 - \zeta) \cos \theta$$

$$\therefore \Omega = \frac{2U}{D} \left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right) \cos \theta$$

Sendo $C_{D1} = 2.3$ e $C_{D2} = 1.2$ (Tabela 1), temos $\zeta = \sqrt{1.2/2.3} = 0.722$. O valor médio de $\cos \theta$ entre 0 e 90° é $2/\pi = 0.637$. Portanto, para estimar a frequência de rotação, escrevemos

$$\Omega = \frac{2U}{D} \times \left(\frac{1 - 0.722}{1 + 0.722} \right) \times 0.637 = \boxed{0.206 \frac{U}{D}}$$

■ Prob. 21

A área de ambos os retrovisores projetada na direção perpendicular ao escoamento é

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0.13^2}{4} = 0.0133 \text{ m}^2$$

Ademais, $\rho \approx 1.225 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar ao nível do mar e $V = 100 \text{ km/h} = 27.8 \text{ m/s}$. Segue que o arrasto exercido sobre o retrovisor achatado, lembrando que $C_D = 1.1$ (Tabela 1), é dado por

$$F_D = C_D \frac{\rho V^2}{2} S = 1.1 \times \frac{1.225 \times 27.8^2}{2} \times 0.0133 = 6.91 \text{ N}$$

Observando que a distância percorrida pelo veículo em um ano é $L = 24,000 \text{ km} = 24 \times 10^6 \text{ m}$, a energia perdida devido à força de arrasto é $E_{drag} = F_D \times L = 6.91 \times (24 \times 10^6) = 1.66 \times 10^8 \text{ J}$. Lembrando que a eficiência do carro é $\eta = 0.3$, a energia necessária para contrabalançar E_{drag} no decurso de um ano é

$$E_{in} = \frac{E_{drag}}{\eta} = \frac{1.66 \times 10^8}{0.3} = 5.53 \times 10^8 \text{ J} = 553 \text{ MJ}$$

Isso corresponde a uma massa m_f de combustível tal que

$$m_f = \frac{E_{in}}{(HV)} = \frac{553,000 \text{ kJ}}{44,000 \text{ kJ/kg}} = 12.57 \text{ kg}$$

ou, em termos de volume,

$$\forall_f = \frac{m_f}{\rho_f} = \frac{12.57 \text{ kg}}{0.75 \text{ kg/L}} = 16.76 \text{ L/yr}$$

O custo correspondente é

$$\text{Custo} = (\text{Volume de combustível}) \times (\text{Preço do combustível})$$

$$\therefore \text{Custo} = \left(16.76 \frac{\cancel{\text{L}}}{\text{yr}} \right) \times \left(\frac{\text{R\$ } 5,60}{\cancel{\text{L}}} \right) = \text{R\$ } 93,86/\text{yr}$$

Portanto, o carro consome 16.76 L anualmente, a um custo total de quase R\$ 94,00, para vencer o arrasto produzido pelo retrovisor achatado. A força de arrasto e o trabalho realizado para vencê-la são diretamente proporcionais ao coeficiente de arrasto. Assim sendo, a redução percentual no consumo de combustível obtida com a substituição do retrovisor achatado pelo retrovisor hemisférico é dada pela redução percentual no coeficiente de arrasto,

$$\text{Redução} = \frac{C_{D,\text{achatado}} - C_{D,\text{hemisférico}}}{C_{D,\text{achatado}}} = \frac{1.10 - 0.40}{1.10} = 0.636$$

Portanto, o volume de combustível economizado é

$$\Delta_f = (\text{Redução}) \times (\text{Volume}) = 0.636 \times (16.76 \text{ L/yr}) = \boxed{10.66 \text{ L/yr}}$$

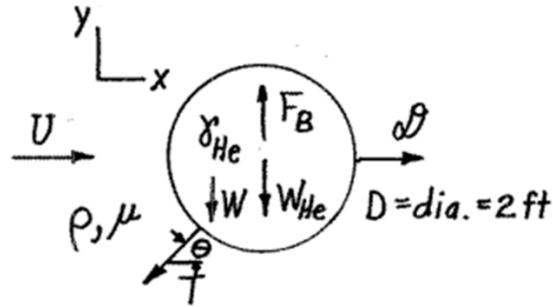
ao passo que a redução em dinheiro é

$$\Delta_{\text{R\$}} = (\text{Redução}) \times (\text{Custo}) = 0.636 \times (\text{R\$ } 93.86) = \boxed{\text{R\$ } 59,70/\text{yr}}$$

Observe, pois, que a simples substituição do tipo de retrovisor implica uma economia de R\$ 60 anualmente.

■ Prob. 22

As forças que atuam no balão são ilustradas no diagrama de corpo livre a seguir.



As únicas forças na direção x (horizontal) são o arrasto D e a componente horizontal T da tração no cabo; isto é,

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow D = T \cos \theta \quad \text{(I)}$$

Na direção y (vertical), por sua vez, temos a componente vertical da tração no cabo, o peso W do material que constitui o balão de hélio, o peso W_{He} do hélio contido no balão e o empuxo hidrostático F_B ; isto é,

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_B = W + T \sin \theta + W_{He} \quad \text{(II)}$$

Mas, pela equação **(I)**, tem-se $T = D/\cos(\theta)$, logo

$$F_B = W + \frac{D}{\cos \theta} \times \sin \theta + W_{He}$$

$$\therefore F_B = W + D \tan \theta + W_{He}$$

Já temos $W = 0.2$ lb. O balão de hélio tem diâmetro igual a 2 ft, logo seu raio é $r_b = 1$ ft e o volume correspondente é

$$\nabla = \frac{4}{3} \pi \times 1.0^3 = 4.19 \text{ ft}^3$$

Multiplicando o referido volume pelo peso específico do ar, tem-se o empuxo F_B ,

$$F_B = \gamma_w \nabla = 0.0763 \times 4.19 = 0.320 \text{ lb}$$

Para obter a força peso referente ao hélio contido no balão, escrevemos

$$W_{He} = \gamma_{He} \nabla = 0.011 \times 4.19 = 0.0461 \text{ lb}$$

Tendo obtido as forças pertinentes, podemos reescrever **(II)** como

$$F_B = W + T \sin \theta + W_{He} \rightarrow 0.320 = 0.2 + D \tan(\theta) + 0.0461$$

$$\therefore D \tan(\theta) = 0.0739 \quad \text{(III)}$$

Mas o arrasto D é dado por

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2}$$

$$D = C_D \times \frac{1}{2} \times 0.00238 \times U^2 \times \left(\frac{\pi}{4} \times 2.0^2 \right) = 0.00374 C_D U^2$$

de modo que, substituindo em **(III)** e manipulando,

$$D \tan \theta = 0.0739 \rightarrow 0.00374 C_D U^2 \times \tan \theta = 0.0739$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{0.0739}{0.00374 C_D U^2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{19.76}{C_D U^2}$$

$$\therefore \theta = \arctan \left(\frac{19.76}{C_D U^2} \right) \quad \text{(IV)}$$

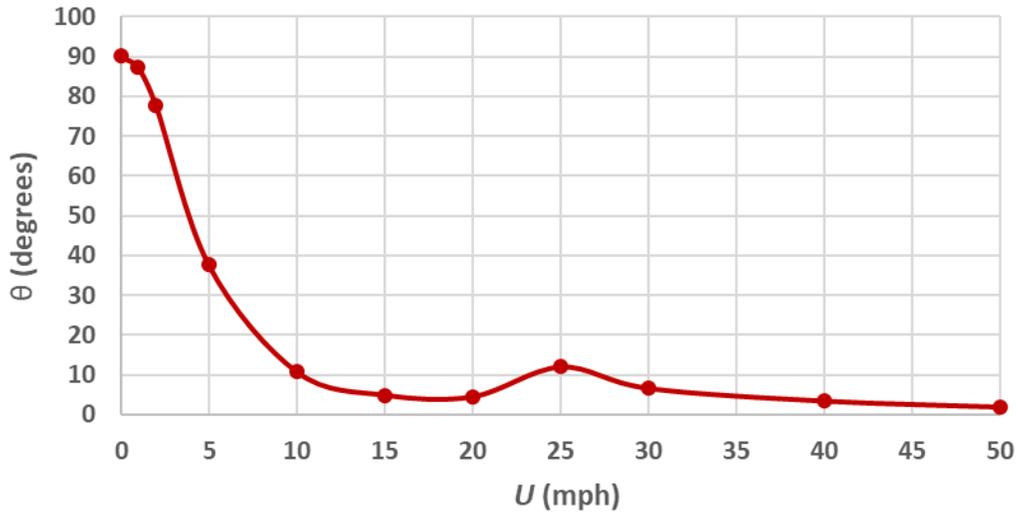
Em seguida, calculamos o número de Reynolds,

$$\text{Re}_d = \frac{Ud}{\nu} = \frac{U \times 2}{1.57 \times 10^{-4}} = 12,739U \quad \text{(V)}$$

Podemos agora tabelar os dados pertinentes. Na tabela da próxima página, a coluna **[1]** lista valores arbitrários para a velocidade U contidos no intervalo $[0; 50]$ mph. A coluna **[2]** converte os valores de **[1]** para ft/s. A coluna **[3]** contém os números de Reynolds calculados com a equação **(V)**. A coluna **[4]** contém os coeficientes de arrasto, os quais podem ser lidos entrando com o número de Reynolds da coluna **[3]** no gráfico da Figura 2. Por fim, a coluna **[5]** contém os ângulos θ obtidos com a equação **(IV)**.

| [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
|-----------|------------|--------|-------|----------------|
| U (mph) | U (ft/s) | Re_d | C_D | θ (deg) |
| 0 | 0.000 | 0 | - | 90 |
| 1 | 1.467 | 18684 | 0.46 | 87.13 |
| 2 | 2.933 | 37368 | 0.51 | 77.48 |
| 5 | 7.334 | 93420 | 0.48 | 37.43 |
| 10 | 14.667 | 186841 | 0.49 | 10.62 |
| 15 | 22.001 | 280261 | 0.49 | 4.76 |
| 20 | 29.334 | 373682 | 0.3 | 4.38 |
| 25 | 36.668 | 467102 | 0.07 | 11.86 |
| 30 | 44.001 | 560522 | 0.09 | 6.47 |
| 40 | 58.668 | 747363 | 0.1 | 3.29 |
| 50 | 73.335 | 934204 | 0.12 | 1.75 |

Ângulo versus Velocidade



■ Referências (★ → Livro altamente recomendado)

1. ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications**. 3. ed. McGraw-Hill, 2014.
2. MUNSON, B.R.; YOUNG, D.F.; OKIISHI, T.H.; HUEBSCH, W.W. **Fundamentals of Fluid Mechanics**. 6. Ed. John Wiley and Sons, 2009.
3. PRITCHARD, P.J. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. 8. ed. John Wiley and Sons, 2011. ★
4. WHITE, F.M. **Fluid Mechanics**. 8. ed. McGraw-Hill, 2011. ★

➔ Referências de cada problema

| Problema | Ref. | Problema | Ref. |
|----------|------|----------|------|
| 1 | - | 12 | [2] |
| 2 | [2] | 13 | [1] |
| 3 | [1] | 14 | [4] |
| 4 | - | 15 | [3] |
| 5 | [1] | 16 | [4] |
| 6 | [1] | 17 | [4] |
| 7 | [2] | 18 | [3] |
| 8 | - | 19 | [3] |
| 9 | [1] | 20 | [4] |
| 10 | [2] | 21 | [1] |
| 11 | [2] | 22 | [2] |

■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

WhatsApp: (61) 981247059

Email: lucas_0150@hotmail.com

