



## Lista de Exercícios Resolvidos 9

# Escoamentos Internos

Lucas Monteiro Nogueira

### ■ Problemas

#### ► Parte 1: Escoamento Laminar

1. Cálculo da Velocidade na Linha Central
2. Cálculo da Perda de Carga – Unidades Imperiais
3. Cálculo do Cisalhamento na Parede – Unidades Imperiais
4. Cálculo da Viscosidade Dinâmica
5. Cálculo da Viscosidade Cinemática
6. Cálculo da Vazão (Fácil)
7. Cálculo da Vazão (Avançado)
8. Tubo de Pitot em um Escoamento Interno
9. Manômetro e Tubo Vertical
10. Escoamento de Couette
11. Escoamento Viscoso em um Conduto Elíptico
12. Escoamento Viscoso em um Conduto Anular I
13. Escoamento Viscoso em um Conduto Anular II
14. Escoamento Viscoso em um Conduto Retangular
15. Fluido Não-Newtoniano do Tipo Lei de Potência

#### ► Parte 2: Escoamento Turbulento

16. Escoamento Turbulento sem Perdas Localizadas
17. Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento I
18. Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento II
19. Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento III
20. Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento IV
21. Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento V
22. Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento VI
23. Condutos em Paralelo I
24. Condutos em Paralelo II
25. Condutos em Paralelo III



### Notas

- ▶ Para resolver os problemas de escoamento turbulento, recomendo [essa calculadora gratuita](#) da equação de Colebrook, disponível no site *Engineering Toolbox*.
- ▶ A seção *Informações Adicionais* lista valores de rugosidade para diferentes materiais e coeficientes de perda localizada para certos componentes.
- ▶ Os cálculos dos problemas 16, 19, 20, 24 e 25 estão disponíveis gratuitamente em um notebook Wolfram Mathematica (formato .nb) disponível [nessa pasta de Google Drive](#).

## ■ Parte 1

### ■ Problema 1 (Cálculo da Velocidade na Linha Central)

Um fluido viscoso escoar em um tubo de 0.10 m de diâmetro tal que a velocidade axial medida a 0.012 m da parede é 0.8 m/s. Se o escoamento é laminar, encontre a velocidade na linha central.

### ■ Problema 2 (Cálculo da Perda de Carga – Unidades Imperiais)

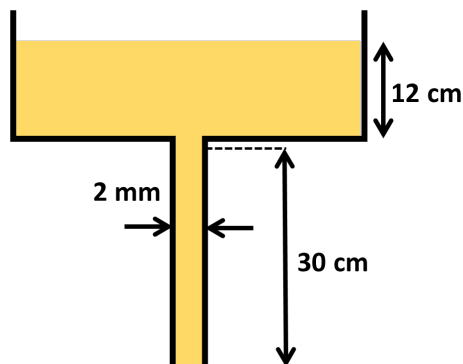
Óleo com gravidade específica  $\overline{SG} = 0.9$  e viscosidade cinemática  $0.007 \text{ ft}^2/\text{s}$  escoar com vazão  $0.01 \text{ ft}^3/\text{s}$  em um tubo de 3 in. de diâmetro. Determine a perda de carga por unidade de comprimento de tubo.

### ■ Problema 3 (Cálculo do Cisalhamento na Parede – Unidades Imperiais)

A queda de pressão necessária para forçar o escoamento de água em um tubo de 1 in. de diâmetro é 0.60 psi para cada 12 ft de tubo. Qual é a tensão de cisalhamento na parede do tubo?

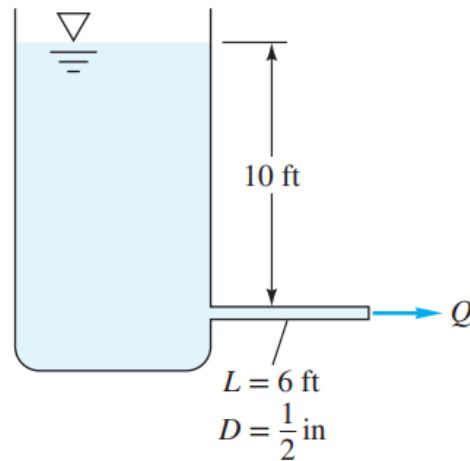
### ■ Problema 4 (Cálculo da Viscosidade Dinâmica)

Para determinar a viscosidade de um líquido com gravidade específica igual a 0.95, preenchemos um tanque com o fluido em questão a uma altura de 12 cm. O tanque é drenado na parte inferior por um tubo vertical de 2 mm de diâmetro, como ilustrado a seguir. Verifica-se que a vazão de drenagem obtida no tubo é  $1.9 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Qual é a viscosidade do líquido? O escoamento é laminar ou turbulento?



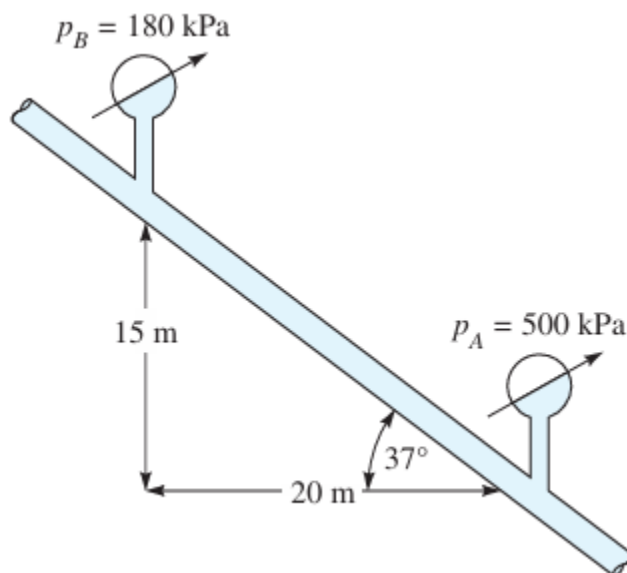
### ■ Problema 5 (Cálculo da Viscosidade Cinemática)

Um óleo de gravidade específica  $\overline{SG} = 0.9$  é vertido por um tubo com as dimensões mostradas e vazão  $Q = 35 \text{ ft}^3/\text{hr}$ . Qual é a viscosidade cinemática do óleo em  $\text{ft}^2/\text{s}$ ? O escoamento é laminar ou turbulento?



### ■ Problema 6 (Cálculo da Vazão - Fácil)

Um óleo automotivo ( $\rho = 890 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0.29 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) escoar ao longo de um tubo cilíndrico inclinado em  $37^\circ$  relativamente à horizontal, como ilustra a figura a seguir. Utilizando as medidas de pressão mostradas na figura, determine a vazão volumétrica em  $\text{m}^3/\text{hr}$  e responda: o óleo escoar para cima ou para baixo?

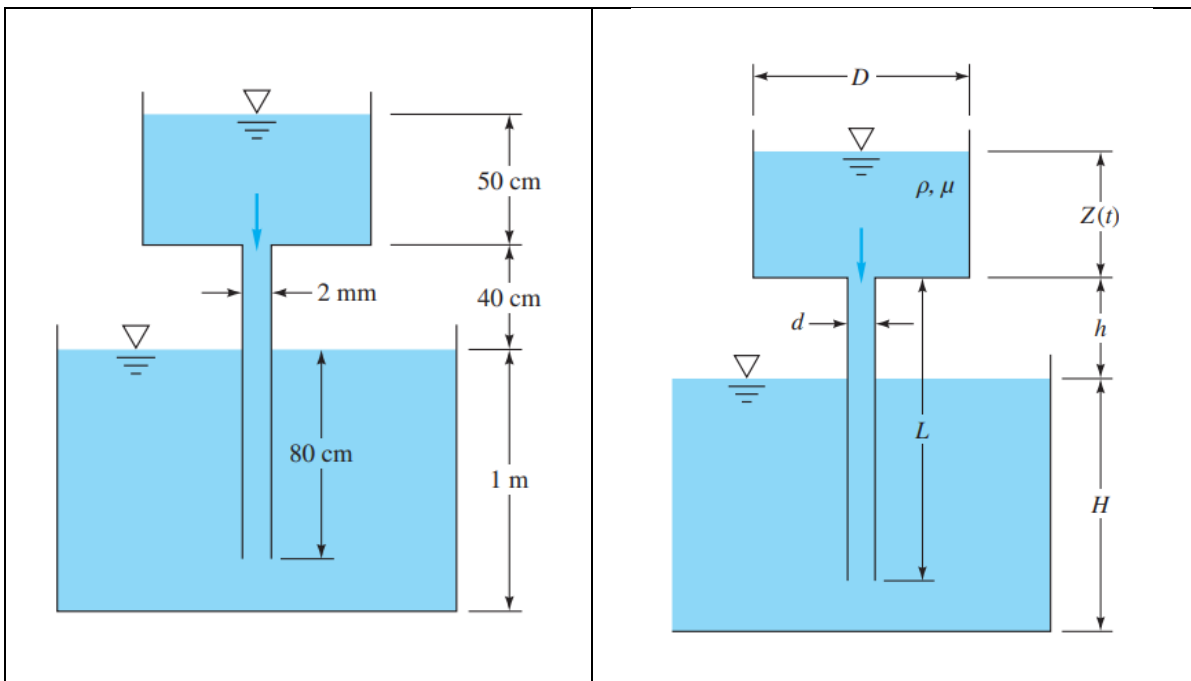


### ■ Problema 7 (Cálculo da Vazão – Avançado)

Para a configuração mostrada na figura da esquerda, o fluido em uso é álcool etílico a 20°C ( $\rho = 789 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0.0012 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ ) e os dois tanques podem ser considerados muito grandes.

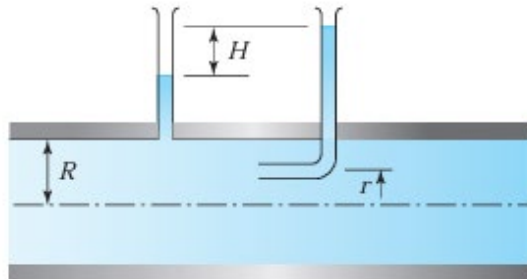
(a) Encontre a vazão em  $\text{m}^3/\text{hr}$ .

(b) Podemos resolver o problema em foco de maneira simbólica. Como mostra a figura à direita, todos os parâmetros são constantes, exceto a profundidade  $Z(t)$  do tanque superior e a vazão  $Q(t)$ . Encontre uma expressão para a vazão  $Q(t)$  como função de  $Z(t)$  e outras variáveis intervenientes. Resolva a equação diferencial obtida e estime o tempo  $t_0$  necessário para drenar o tanque superior completamente.



### ■ Problema 8 (Tubo de Pitot em um Escoamento Interno)

Considere o escoamento interno em tubo cilíndrico ilustrado a seguir. Posicionamos um tubo de Pitot em um ponto do tubo, como mostra a figura. Sabe-se que a vazão volumétrica no sistema é  $\pi R^2 \sqrt{2gH}$ . Sabendo disso, exprima  $r$  (a distância entre o tubo de Pitot e a linha central do conduto) em função de  $R$  (o raio do conduto).



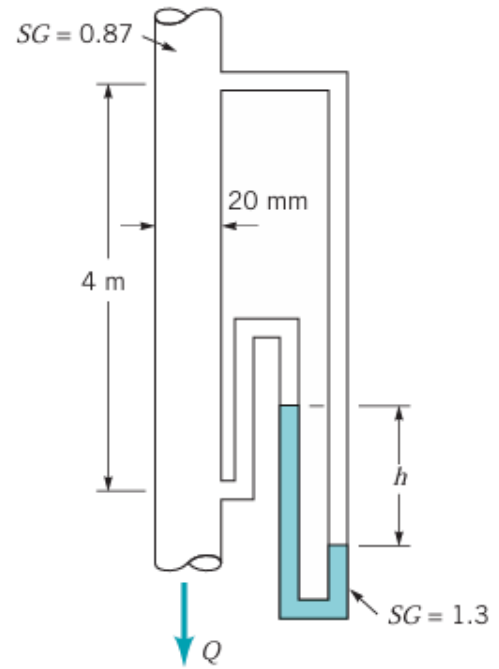
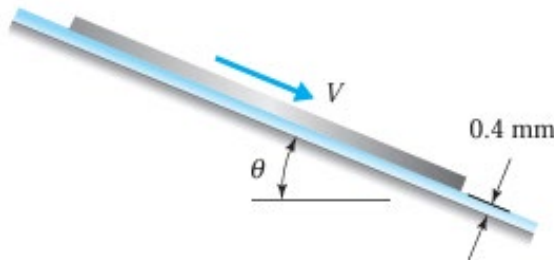
■ **Problema 9 (Manômetro e Tubo Vertical)**

(a) Um tipo de óleo com gravidade específica  $\overline{SG} = 0.87$  e viscosidade cinemática  $\nu = 2.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  escoo pelo tubo vertical ilustrado ao lado com vazão  $4 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Encontre a leitura  $h$  do manômetro.

(b) Determine a leitura do manômetro se o escoamento é vertical para cima ao invés de vertical para baixo.

■ **Problema 10 (Escoamento de Couette)**

Uma placa com dimensões  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  e peso  $40 \text{ N}$  desliza sobre um filme com velocidade constante  $V = 0.2 \text{ m/s}$ . Sabendo que  $\theta = 30^\circ$ , estime a viscosidade do fluido que compõe o filme.



■ **Problema 11 (Escoamento Viscoso em um Conduto Elíptico)**

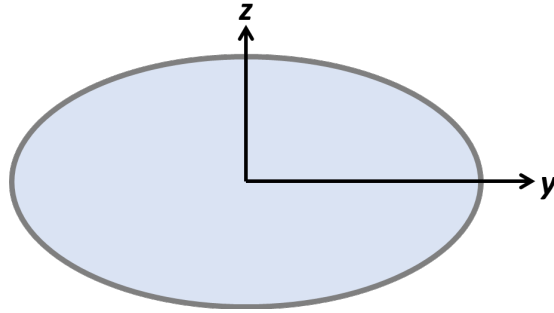
A seguinte solução,

$$u = u_o \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$$

fornece o perfil de velocidades de um escoamento pressurizado completamente desenvolvido em um conduto de seção elíptica. O centro da elipse é  $(y,z) = (0,0)$  e o semieixo maior de comprimento  $a$  e o semieixo menor de comprimento  $b$  são paralelos aos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente. O gradiente de pressão  $\partial p/\partial x$  é constante. Com base nas equações de Navier-Stokes, exprima a velocidade máxima  $u_o$  como função de  $a$ ,  $b$ , viscosidade  $\mu$  e  $\partial p/\partial x$ . Sendo  $(\rho, \phi)$  as coordenadas polares radial e azimutal, respectivamente, de um disco unitário ( $0 \leq \rho \leq 1$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ), as coordenadas  $(y,z)$  e a velocidade  $u(y,z)$  podem ser escritas como funções de  $(\rho, \phi)$ :

$$y(\rho, \phi) = a\rho \cos \phi \quad ; \quad z(\rho, \phi) = b\rho \sin \phi \quad ; \quad u(\rho, \phi) = u_o (1 - \rho^2)$$

A vazão volumétrica é  $Q = \int u(y,z) dydz = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho u(\rho, \phi) d\rho d\phi$ . Obtenha a vazão volumétrica de um escoamento pressurizado completamente desenvolvido em um conduto elíptico. Compare as vazões obtidas para um conduto elíptico com  $a = 1.5R$ ,  $b = R$  e um tubo cilíndrico de raio  $R$ .



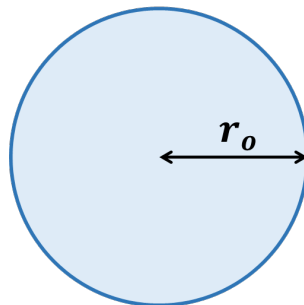
### ■ Problema 12 (Escoamento Viscoso em um Conduto Anular I)

Encontre a razão entre (1) a vazão volumétrica de um tubo cilíndrico de raio  $r_o$  e (2) a vazão volumétrica de um tubo anular de raio interno  $r_o/2$  e raio externo  $r_o$ .

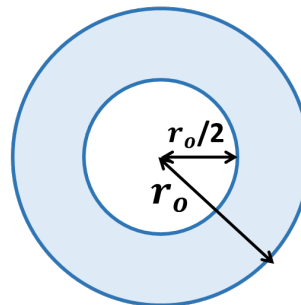
**Dica:** A vazão volumétrica em um conduto anular de raio interno  $r_1$  e raio externo  $r_2$  é dada por

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} \left[ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)} \right]$$

Conduto 1

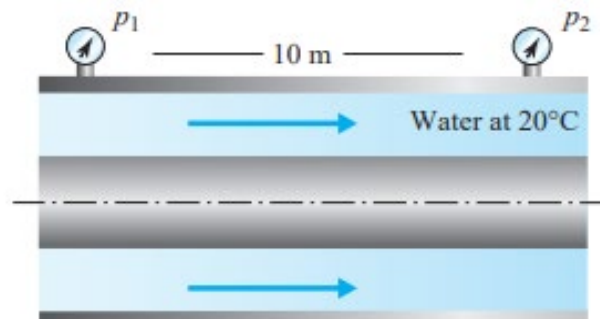


Conduto 2



### ■ Problema 13 (Escoamento Viscoso em um Conduto Anular II)

Água a 20°C escoa entre dois tubos horizontais concêntricos com diâmetros 2 e 3 cm, respectivamente. Uma queda de pressão de 100 Pa é medida em um segmento de 10 m desse conduto. O escoamento é completamente desenvolvido e laminar ao longo do referido segmento. Calcule a vazão volumétrica e a tensão de cisalhamento exercida na parede do cilindro interno.



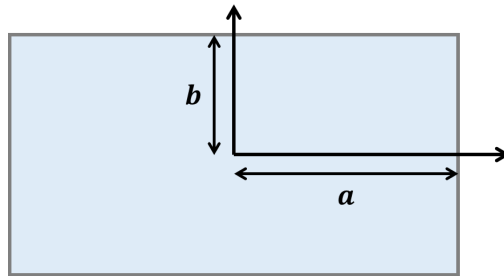
### ■ Problema 14 (Escoamento Viscoso em um Conduto Retangular)

Ar a temperatura 20°C ( $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) escoa com velocidade média igual a 1.3 m/s em um duto retangular de dimensões  $2b = 1 \text{ cm} \times 2a = 4 \text{ cm}$ . Estime a queda de pressão usando **(a)** a solução exata fornecida como dica; e **(b)** a aproximação do diâmetro hidráulico.

**Dica:** A vazão volumétrica em um conduto retangular de dimensões  $a \times b$  é dada por

$$Q = \frac{2ba^3}{3\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left[ 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(k\pi b/2a)}{k^5} \right]$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $dp/dx$  é o gradiente de pressão.



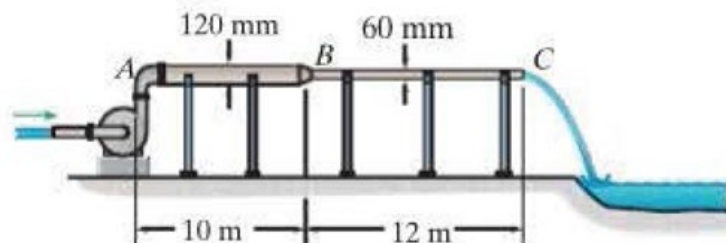
### ■ Problema 15 (Fluido Não-Newtoniano do Tipo Lei de Potência)

Derive o perfil de velocidades e a vazão volumétrica do escoamento de um fluido não-newtoniano do tipo lei de potência (isto é, um fluido cuja relação entre taxa de deformação  $\dot{\gamma}$  e tensão de cisalhamento  $\tau$  tem a forma  $\tau = K_p \dot{\gamma}^n$ ) em um conduto circular. Para um sistema com vazão  $Q = 1 \text{ }\mu\text{L/min}$ , raio  $R = 1 \text{ mm}$  e um dado coeficiente  $K_p$ , compare os gradientes de pressão para expoentes  $n = 0.5, 1.0$  e  $1.5$ . Qual fluido deve ser alimentado pela *menor* bomba para um dado comprimento de tubo?

### ■ Parte 2

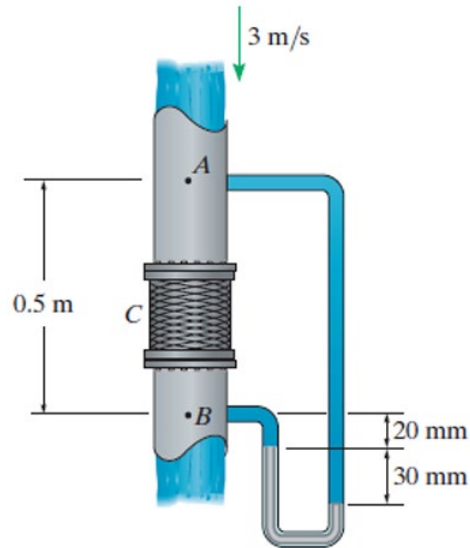
### ■ Problema 16 (Escoamento Turbulento sem Perdas Localizadas)

Água a 20°C é continuamente bombeada para dentro de um conduto de alumínio com os comprimentos e diâmetros mostrados na figura. Sabendo que a pressão no ponto A é 230 kPa, determine a vazão de descarga em C. **Despreze perdas localizadas.**



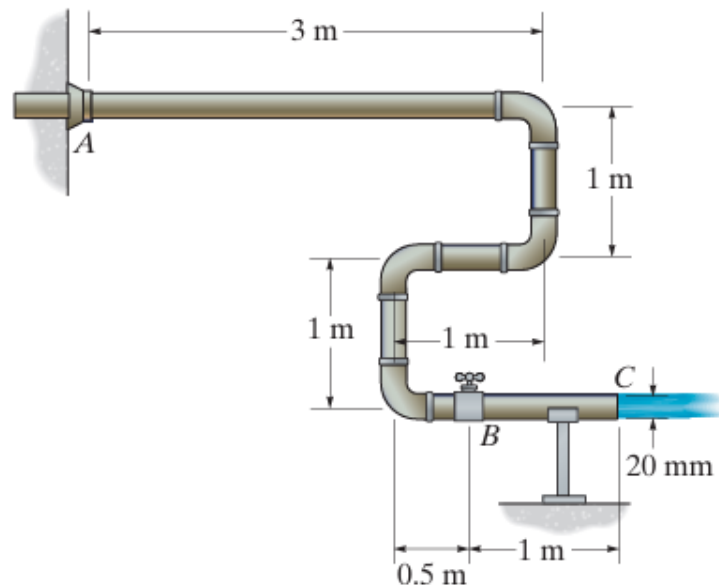
### ■ Problema 17 (Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento I)

Um escoamento vertical de água percorre o conduto vertical mostrado a seguir com velocidade 3 m/s. Sabendo que a diferença de elevação indicada pelo manômetro de mercúrio é 30 mm (vide figura), determine o coeficiente de perda localizada do filtro C. Use  $\rho_{\text{Hg}} = 13,350 \text{ kg/m}^3$  como a densidade do mercúrio.



### ■ Problema 18 (Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento II)

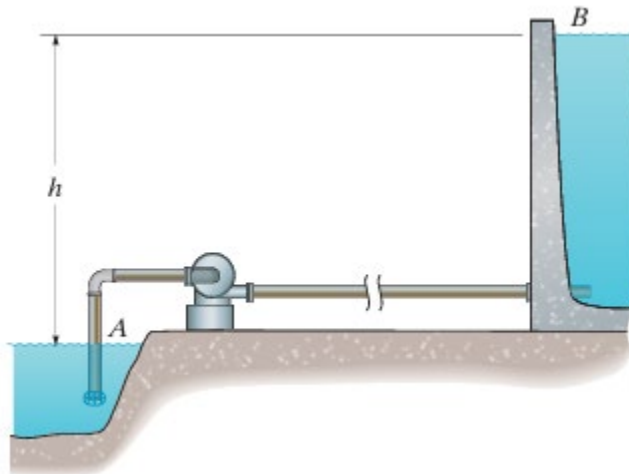
Água a 20°C escoam em um conduto de ferro galvanizado de 20 mm de diâmetro que deságua no ponto C da ilustração a seguir. A válvula gaveta B está aberta e a vazão volumétrica no sistema é 0,003 m<sup>3</sup>/s. Determine a pressão necessária em A. Inclua as perdas dos quatro cotovelos e da válvula gaveta.





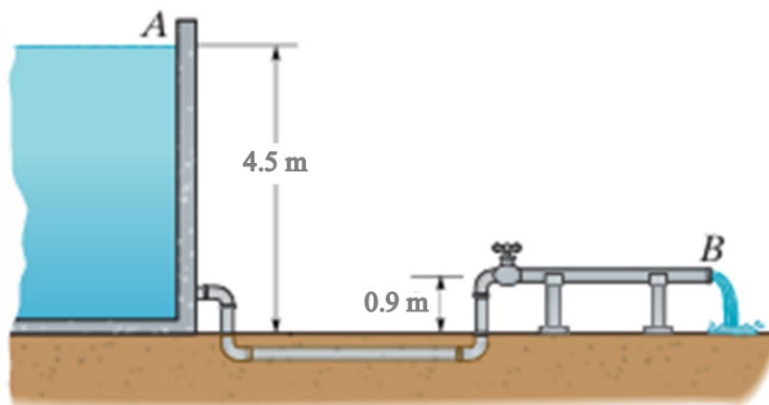
■ **Problema 19 (Perdas Localizadas e escoamento turbulento III)**

Água a 20°C é bombeada de um reservatório A para um grande tanque B. Se a potência fornecida pela bomba é 3.70 kW, determine a vazão volumétrica para dentro do tanque quando  $h = 8$  m. O conduto de ferro forjado tem comprimento total 30 m e diâmetro 75 mm. Inclua as perdas localizadas referentes ao cotovelo e à expansão súbita da bomba.



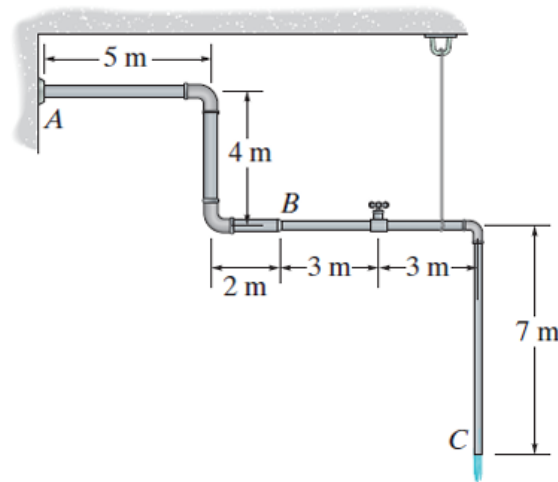
■ **Problema 20 (Perdas Localizadas e escoamento turbulento IV)**

Água a 25°C escoar de um grande reservatório para uma tubulação de ferro galvanizado com 7.5 cm de diâmetro. Determine a vazão descarregada em B. O comprimento total da tubulação é 45 m. Inclua as perdas localizadas na entrada, nos quatro cotovelos e na válvula globo.



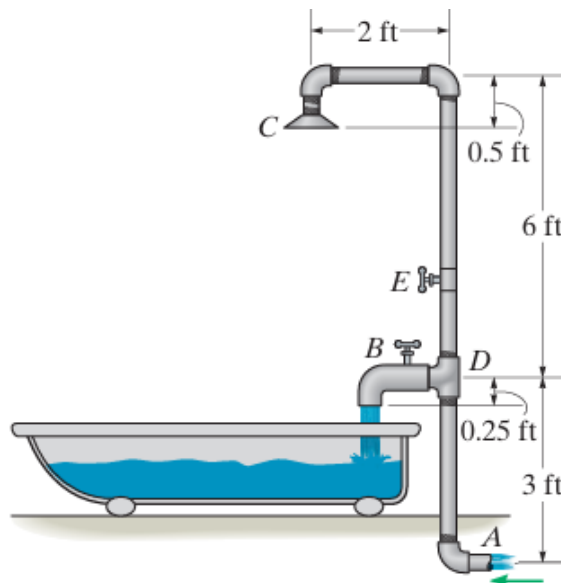
### ■ Problema 21 (Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento V)

Quando a válvula globo  $B$  na ilustração a seguir é completamente aberta, a tubulação descarrega água à taxa de  $3 \text{ L/s}$  na saída  $C$ . Determine a pressão em  $A$ . Os segmentos de tubulação  $AB$  e  $BC$  são ambos feitos de chumbo e têm diâmetros respectivamente iguais a  $60 \text{ mm}$  e  $30 \text{ mm}$ . Inclua as perdas localizadas dos três cotovelos e da válvula globo.



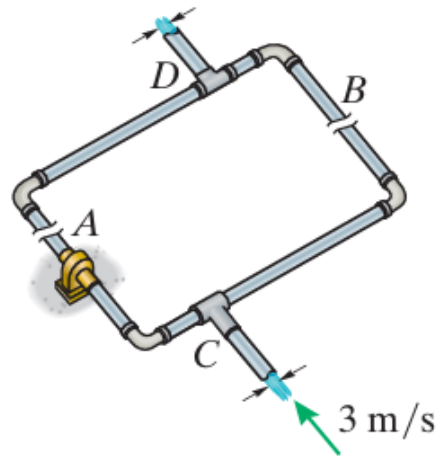
### ■ Problema 22 (Perdas Localizadas e Escoamento Turbulento VI)

Água a  $80^\circ\text{F}$  escoam com velocidade  $5 \text{ ft/s}$  na base  $A$  de uma tubulação, como ilustra a figura a seguir. O segmento  $ADEC$  tem diâmetro de  $0.75 \text{ in.}$  Sabendo que a válvula de  $0.5 \text{ in.}$  de diâmetro em  $B$  está completamente aberta, determine a pressão da água em  $A$ . O coeficiente de perda localizada do bico a jusante de  $B$  é  $k_L = 0.6$ . Inclua as perdas localizadas associadas ao cotovelo, ao tê, ao bico e à válvula gaveta em  $B$ . Use  $f = 0.016$  como o fator de atrito da tubulação  $ADEC$ .



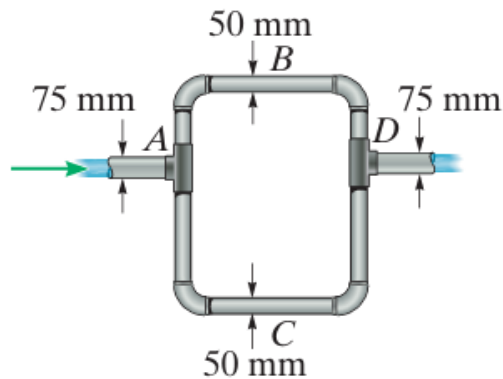
### ■ Problema 23 (Conduto em Paralelo I)

Dois condutos de ferro galvanizado formam um *loop*, como ilustra a figura a seguir. O ramo *CAD* tem 120 m de comprimento e o ramo *CBD* tem 60 m de comprimento. Determine a potência da bomba usada no ramo *CAD* sabendo que os dois ramos transportam vazões idênticas de água a 20°C. Toda a tubulação possui diâmetro de 75 mm. Suponha que o *loop* está no plano horizontal e despreze perdas localizadas.



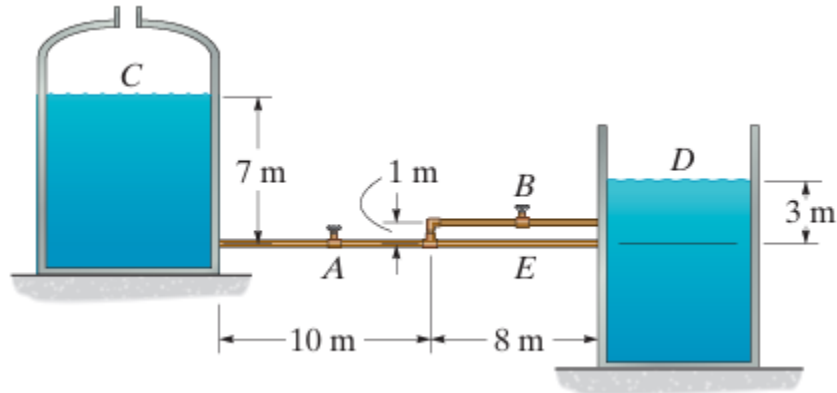
### ■ Problema 24 (Conduto em Paralelo II)

Um escoamento de água a 20°C é bombeado no conduto de aço galvanizado ilustrado a seguir, que consiste de dois segmentos *ABD* e *ACD* de mesmo diâmetro 50 mm e comprimentos respectivamente iguais a 8 e 12 m. Sabendo que a queda de pressão entre *A* e *D* é 75 kPa, determine a vazão volumétrica nos dois segmentos. Suponha que o *loop* está no plano horizontal e despreze perdas localizadas.



### ■ Problema 25 (Conduitos em Paralelo III)

No sistema ilustrado a seguir, dois tanques d'água são conectados por uma tubulação de ferro galvanizado. Todos os segmentos da tubulação têm 100 mm de diâmetro. Determine a vazão drenada do tanque C quando ambas as válvulas gaveta A e B estão abertas. Despreze perdas localizadas.



### ■ Informações Adicionais

**Tabela 1.** Alturas de rugosidade de materiais comuns.

Material	Rugosidade (mm)
Aço-carbono	0.05
Alumínio	0.002
Chumbo	0.0015
Cobre	0.0015
Ferro forjado	0.045
Ferro fundido (novo)	0.26
Ferro galvanizado	0.15
Latão	0.0014

**Tabela 2.** Coeficientes de perda localizada de alguns componentes.

Componente	$k_L$
Bico	0.6
Cotovelo 90°	0.9
Entrada <i>flush</i>	0.5
Expansão súbita	1.0
Tê	1.8
Válvula gaveta - Aberta	0.19
Válvula globo - Aberta	10

## ■ Soluções

### ■ Prob. 1

Sabe-se que a distribuição da velocidade axial em um escoamento de Hagen-Poiseuille é dada por

$$u(r) = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{2r}{d} \right)^2 \right]$$

Ademais, temos  $d = 0.1$  m e a velocidade em  $r = 0.1/2 - 0.012 = 0.038$  m é  $u(r) = 0.8$  m/s. Substituindo acima e resolvendo para  $u_{\max}$ , temos

$$0.8 = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{2 \times 0.038}{0.10} \right)^2 \right] \rightarrow 0.422 u_{\max} = 0.8$$

$$\therefore u_{\max} = \frac{0.8}{0.422} = \boxed{1.90 \text{ m/s}}$$

### ■ Prob. 2

O diâmetro do tubo é  $d = 3/12 = 0.25$  in e a área de seção é  $A = \pi \times 0.25^2/4 = 0.0491$  ft<sup>2</sup>. Conhecendo a vazão  $Q = 0.01$  ft<sup>3</sup>/s e a área de seção  $A$ , podemos obter a velocidade  $V$ ,

$$Q = VA \rightarrow V = \frac{Q}{A}$$
$$\therefore V = \frac{0.01}{0.0491} = 0.204 \text{ ft/s}$$

O número de Reynolds é

$$\text{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.204 \times 0.25}{0.007} = 7.29$$

Sendo  $\text{Re}_d < 2100$ , o escoamento é laminar e o fator de atrito de Darcy pode ser determinado com

$$f = \frac{64}{\text{Re}_d} = \frac{64}{7.29} = 8.80$$

A perda de carga por unidade de comprimento de tubo é dada pela lei de Darcy,

$$h_L = f \frac{\ell}{D} \frac{V^2}{2g} = 8.80 \times \frac{1}{0.25} \times \frac{0.204^2}{2 \times 32.2} = \boxed{0.023 \text{ ft/ft}}$$

### ■ Prob. 3

Para um conduto cilíndrico horizontal, a tensão de cisalhamento  $\tau$  é dada por

$$\tau = \frac{r\Delta p}{2L}$$

Substituindo  $r_w = 0.5$  in.,  $\Delta p = 0.60$  psi e  $L = 12$  ft = 144 in., vem

$$\tau_w = \frac{r_w\Delta p}{2L} = \frac{0.5 \times 0.60}{2 \times 144} = 0.00104 \text{ psi} = \boxed{0.150 \text{ lb/ft}^2}$$

### ■ Prob. 4

Começamos com o cálculo da velocidade de escoamento no tubo vertical,

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1.9 \times 10^{-6}}{(\pi/4) \times 0.002^2} = 0.605 \text{ m/s}$$

Ademais, a densidade do líquido desconhecido é  $\rho_\ell = 0.95 \times 1000 = 950 \text{ kg/m}^3$ .

Escrevendo a equação de Bernoulli entre a superfície livre do tanque e a extremidade inferior do tubo, temos

$$\frac{\cancel{p_{\text{topo}}}}{\cancel{\rho_\ell g}} + \frac{\cancel{V_{\text{topo}}^2}}{\cancel{2g}} + z_{\text{topo}} = \frac{\cancel{p}}{\cancel{\rho_\ell g}} + \frac{V^2}{2g} + h_L$$

$$\therefore z_{\text{topo}} = \frac{V^2}{2g} + h_L$$

$$\therefore (0.30 + 0.12) = \frac{0.605^2}{2 \times 9.81} + \frac{32\mu LV}{\rho g d^2}$$

$$\therefore (0.30 + 0.12) = \frac{0.605^2}{2 \times 9.81} + \frac{32 \times \mu \times 0.3 \times 0.605}{950 \times 9.81 \times 0.002^2}$$

$$\therefore 0.42 = 0.0187 + 156\mu$$

$$\therefore \mu = \frac{0.42 - 0.0187}{156} = 0.00257 \text{ Pa} \cdot \text{s} = \boxed{2.57 \text{ cP}}$$

O número de Reynolds do escoamento é

$$Re_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{950 \times 0.605 \times 0.002}{0.00257} = 447$$

Como  $Re_d < 2100$ , o escoamento é laminar.

### ■ Prob. 5

A vazão no tubo é  $Q = 35 \text{ ft}^3/\text{hr} = 0.00972 \text{ ft}^3/\text{s}$ , a área de seção do tubo é  $A = (\pi/4) \times (0.5/12)^2 = 0.00136 \text{ ft}^2$  e a velocidade de escoamento é  $V = Q/A = 0.00972/0.00136 = 7.15 \text{ ft/s}$ . A variação em carga de elevação é  $z_1 - z_2 = 10 \text{ ft}$ , onde os subscritos 1 e 2 denotam condições na superfície livre do tanque e na saída do conduto, respectivamente. Podemos então determinar a perda de carga  $h_L$ ,

$$h_L = (z_1 - z_2) - \frac{V^2}{2g} = 10 - \frac{7.15^2}{2 \times 32.2} = 9.21 \text{ ft}$$

Supondo que o escoamento é laminar, a viscosidade cinemática  $\nu$  torna-se

$$h_L = 9.21 = \frac{128\nu LQ}{\pi g d^4} \rightarrow \nu = \frac{9.21\pi g d^4}{128LQ}$$
$$\therefore \nu = \frac{9.21\pi \times 32.2 \times (0.5/12)^4}{128 \times 6 \times 0.00972} = \boxed{3.76 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{s}}$$

Concluimos a solução com o cálculo do número de Reynolds  $Re_d$ ,

$$Re_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{7.15 \times (0.5/12)}{3.76 \times 10^{-4}} = 792$$

Como  $Re_d < 2100$ , o escoamento é laminar.

### ■ Prob. 6

Começamos a solução com o cálculo das cotas piezométricas nas posições dos manômetros A e B,

$$\overline{HGL}_A = \frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{500,000}{890 \times 9.81} + 0 = 57.3 \text{ m}$$
$$\overline{HGL}_B = \frac{p_B}{\rho g} + z_B = \frac{180,000}{890 \times 9.81} + 15 = 35.6 \text{ m}$$

Como  $\overline{HGL}_A > \overline{HGL}_B$ , o escoamento é para cima. A perda de carga é a diferença das cotas piezométricas determinadas acima, ou seja,  $h_L = 57.3 - 35.6 = 21.7 \text{ m}$ .

Resolvendo a equação de Poiseuille para a vazão  $Q$ , vem

$$h_L = \frac{128\mu LQ}{\pi \rho g d^4} \rightarrow Q = \frac{\pi \rho g h_L d^4}{128\mu L}$$
$$\therefore Q = \frac{\pi \times 890 \times 9.81 \times 21.7 \times 0.03^4}{128 \times 0.29 \times 25} = 5.20 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = \boxed{1.87 \text{ m}^3/\text{hr}}$$

### ■ Prob. 7

**Parte (a):** A diferença de elevação entre o tanque inferior e o tanque superior é 40 cm + 50 cm = 90 cm = 0.9 m. Com  $h_L = 0.9$  m, podemos substituir na equação de Poiseuille e determinar a vazão  $Q$ ,

$$h_L = 0.9 = \frac{128\mu L Q}{\pi \rho g d^4} = \frac{128 \times 0.0012 \times 1.2 \times Q}{\pi \times 789 \times 9.81 \times 0.002^4}$$
$$\therefore 0.9 = 473,800Q$$
$$\therefore Q = \frac{0.9}{473,800} = 1.90 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = \boxed{0.00684 \text{ m}^3/\text{hr}}$$

Convém checar o número de Reynolds,

$$Re_d = \frac{4\rho Q}{\pi\mu d} = \frac{4 \times 789 \times (1.90 \times 10^{-6})}{\pi \times 0.0012 \times 0.002} = 795$$

Como  $Re_d < 2100$ , o escoamento é laminar.

**Parte (b):** Temos aqui um estudo generalizado do problema resolvido na parte (a). A diferença de carga entre os tanques é agora  $h + Z(t)$ , portanto,

$$h_L = \frac{32\mu L V}{\rho g d^2} = h + Z(t)$$

Igualamos a vazão volumétrica drenada do tanque superior (lado esquerdo da equação a seguir) à vazão do tubo que une os dois tanques (lado direito da equação),

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{dZ}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4} V \quad \text{(I)}$$

onde

$$V = \frac{\rho g d^2}{32\mu L} (h + Z)$$

Substituindo em **(I)**,

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{dZ}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4} \times \frac{\rho g d^2}{32\mu L} (h + Z)$$
$$\therefore D^2 \frac{dZ}{dt} = -\frac{\rho g d^4}{32\mu L} (h + Z)$$
$$\therefore \frac{dZ}{(h + Z)} = -\frac{\rho g d^4}{32\mu L D^2} dt$$



Abreviamos a notação com o seguinte parâmetro,

$$\lambda = \frac{\rho g d^4}{32 \mu L D^2}$$

Integrando entre  $Z = Z_o$  (profundidade inicial do tanque superior) e  $Z$  (profundidade do tanque superior no instante  $t$ ), vem

$$\begin{aligned} \int_{Z_o}^Z \frac{dZ}{(h+Z)} &= -\lambda \int_0^t dt \\ \therefore \ln \left( \frac{h+Z}{h+Z_o} \right) &= -\lambda t \\ \therefore \frac{h+Z}{h+Z_o} &= e^{-\lambda t} \\ \therefore h+Z &= (h+Z_o) e^{-\lambda t} \\ \therefore \boxed{Z(t) = (h+Z_o) e^{-\lambda t} - h} \end{aligned}$$

A expressão acima mostra que a profundidade  $Z$  decai exponencialmente ao longo do tempo  $t$ . Para estimar o tempo  $t_o$  necessário para que o tanque superior seja esvaziado, fazemos  $Z = 0$  e resolvemos para  $t_o$ ,

$$\begin{aligned} Z(t_o) = 0 &\rightarrow 0 = (h+Z_o) e^{-\lambda t_o} - h \\ \therefore (h+Z_o) e^{-\lambda t_o} &= h \\ \therefore e^{-\lambda t_o} &= \frac{h}{h+Z_o} \\ \therefore e^{\lambda t_o} &= \frac{h+Z_o}{h} \\ \therefore e^{\lambda t_o} &= 1 + \frac{Z_o}{h} \\ \therefore \lambda t_o &= \ln \left( 1 + \frac{Z_o}{h} \right) \\ \therefore \boxed{t_o = \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{Z_o}{h} \right)} \end{aligned}$$

### ■ Prob. 8

Se  $Q = \pi R^2 \sqrt{2gH}$ , então  $V = \sqrt{2gH}$ . Sabe-se que o perfil de velocidades é dado pela equação usual

$$u(r) = u_o \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = 2V \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = 2\sqrt{2gH} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Mas, pela equação de Bernoulli, temos  $H = u^2/2g$  (ou seja, a carga de elevação registrada pelo tubo de Pitot é igual à carga cinética associada à velocidade axial do escoamento). Substituindo acima e resolvendo para  $r$ , vem

$$\begin{aligned} u &= 2\sqrt{2gH} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2\sqrt{\cancel{2g} \times \frac{u^2}{\cancel{2g}}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ \therefore \cancel{u} &= 2\cancel{u} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ \therefore \frac{1}{2} &= 1 - \frac{r^2}{R^2} \\ \therefore \frac{r^2}{R^2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ \therefore r^2 &= \frac{1}{2} R^2 \\ \therefore r &= \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \therefore \boxed{r = 0.707R} \end{aligned}$$

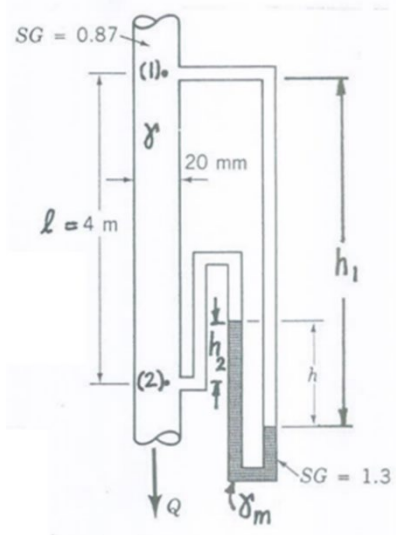
### ■ Prob. 9

**Parte (a):** Começamos com o cálculo da velocidade de escoamento,

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 10^{-4}}{\left( \frac{\pi}{4} \times 0.02^2 \right)} = 1.27 \text{ m/s}$$

O número de Reynolds é

$$Re_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.27 \times 0.02}{2.2 \times 10^{-4}} = 155$$



Como  $Re_d < 2100$ , o escoamento é laminar e a equação de Poiseuille é válida, ou seja,

$$Q = \frac{\pi(\Delta p + \gamma \ell) D^4}{128 \mu \ell}$$

Resolvendo para a queda de pressão  $\Delta p$ ,

$$Q = \frac{\pi(\Delta p + \gamma \ell) D^4}{128 \mu \ell} \rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{128 \mu \ell Q}{\pi d^4} - \gamma \ell \quad \text{(I)}$$

O peso específico do óleo é  $\gamma = \overline{SG} \times 9810 = 0.87 \times 9810 = 8530 \text{ N/m}^3 = 8.53 \text{ kN/m}^3$  e a viscosidade dinâmica é  $\mu = \nu \rho = (2.2 \times 10^{-4}) \times 870 = 0.191 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Substituindo os dados pertinentes em **(I)**, vem

$$p_1 - p_2 = \frac{128 \times 0.191 \times 4 \times (4 \times 10^{-4})}{\pi \times 0.02^4} - 8530 \times 4 = 43,700 \text{ Pa} = 43.7 \text{ kPa}$$

Escrevendo um balanço de pressões no manômetro, temos

$$p_1 + \gamma h_1 - \gamma_m h + \gamma h_2 = p_2 \quad \text{(I)}$$

O peso específico do fluido do manômetro, sendo  $\overline{SG}_m = 1.3$ , é

$$\gamma_m = \overline{SG}_m \gamma_w = 1.3 \times 9810 = 12,750 \text{ N/m}^3 = 12.75 \text{ kN/m}^3$$

Pela geometria do sistema, temos

$$\begin{aligned} h_1 &= h - h_2 - \ell \\ \therefore h_2 + h_1 &= h + \ell \end{aligned}$$

de modo que **(I)** pode ser reescrito como

$$p_1 - p_2 = \Delta p = -\gamma(h_2 + h_1) + \gamma_m h = (\gamma_m - \gamma)h - \gamma \ell$$

Isolando  $h$  e substituindo os valores disponíveis,

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 = (\gamma_m - \gamma)h - \gamma \ell &\rightarrow h = \frac{(p_1 - p_2) + \gamma \ell}{\gamma_m - \gamma} \\ \therefore h &= \frac{43.7 + 8.53 \times 4}{12.75 - 8.53} = \boxed{18.4 \text{ m}} \end{aligned}$$

**Parte (b):** Os passos que precedem a equação **(I)** são os mesmos, mas a queda de pressão é agora enunciada como

$$Q = \frac{\pi(\Delta p - \gamma \ell) D^4}{128 \mu \ell} \rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{128 \mu \ell Q}{\pi d^4} + \gamma \ell \quad \text{(II)}$$

$$\therefore p_1 - p_2 = \frac{128 \times 0.191 \times 4 \times (4 \times 10^{-4})}{\pi \times 0.02^4} + 8530 \times 4 = 111,900 \text{ Pa} = 111.9 \text{ kPa}$$

A geometria do manômetro nos permite escrever

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \gamma(h_2 + h_1) - \gamma_m h = -(\gamma_m - \gamma)h + \gamma \ell$$

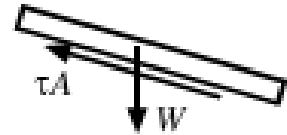
$$\therefore 111.9 = -(12.75 - 8.53) \times h + 8.53 \times 4$$

$$\therefore h = \frac{8.53 \times 4 - 111.9}{12.75 - 8.53} = \boxed{-18.4 \text{ m}}$$

O sinal negativo indica que o nível do manômetro se deslocará na direção oposta à direção suposta na parte (a).

### ■ Prob. 10

Desenhando um diagrama de corpo livre para a placa em questão, vê-se que o atrito  $\tau A$  gerado pelo contato com o fluido viscoso deve equilibrar a componente do peso  $W$  da placa na direção do deslizamento. Matematicamente,



$$\tau A = W \sin \theta \quad \text{(I)}$$

Temos  $A = 1 \times 1 = 1.0 \text{ m}^2$  e  $W = 40 \text{ N}$ . Precisamos determinar a tensão de cisalhamento  $\tau$ , que é dada por

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{(II)}$$

onde a velocidade de escoamento  $u$  é dada pelo perfil de velocidades de um escoamento de Couette,

$$u = \frac{Vy}{a}$$

Diferenciando com relação a  $y$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V}{a}$$

Substituindo em (II),

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu V}{a} = \frac{0.2 \mu}{0.4 \times 10^{-3}}$$

Substituindo em (I) e resolvendo para a viscosidade  $\mu$ ,

$$\tau A = W \sin \theta \rightarrow \frac{0.2\mu}{0.4 \times 10^{-3}} = 40 \times \sin(30^\circ)$$

$$\therefore \mu = \frac{40 \times 0.4 \times 10^{-3} \times \sin(30^\circ)}{0.2} = 0.04 \text{ Pa} \cdot \text{s} = \boxed{40.0 \text{ cP}}$$

### ■ Prob. 11

A versão da equação de Navier-Stokes com a qual analisamos um conduto elíptico é idêntica àquela que empregamos na análise de um tubo circular,

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{(I)}$$

Usando o perfil de velocidades fornecido, é fácil ver que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2u_o}{a^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2u_o}{b^2}$$

Substituindo em (I),

$$-2\mu u_o \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\therefore -2\mu u_o \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\therefore u_o = -\frac{a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \frac{\partial p}{\partial x}$$

A expressão acima fornece a velocidade máxima  $u_o$  para um escoamento interno pressurizado plenamente desenvolvido em um conduto de seção elíptica. Como no caso clássico do escoamento de Hagen-Poiseuille, a velocidade máxima é diretamente proporcional ao gradiente de pressão  $\partial p/\partial x$  e inversamente proporcional à viscosidade dinâmica  $\mu$  do fluido escoante. Para obter a vazão volumétrica  $Q$ , usamos a mudança de coordenadas proposta no enunciado do problema e integramos sobre a seção elíptica,

$$Q = \int u(y, z) dydz = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho u(\rho, \phi) d\rho d\phi$$

$$\therefore Q = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho u_o (1 - \rho^2) d\rho d\phi$$

$$\therefore Q = abu_o \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho d\phi$$

$$\begin{aligned}\therefore Q &= abu_o \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\phi \\ \therefore Q &= \frac{abu_o}{4} \times 2\pi \\ \therefore Q &= \frac{\pi abu_o}{2}\end{aligned}$$

Substituindo  $u_o$  pela expressão encaixotada acima, vem

$$Q = \frac{\pi ab}{2} \times \left[ -\frac{a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \boxed{\frac{\pi a^3 b^3}{4\mu(a^2 + b^2)} \frac{\partial p}{\partial x}} \quad \text{(II)}$$

Se tivéssemos um conduto elíptico com semieixos  $a = 1.5R$  e  $b = R$ , a vazão  $Q$  seria

$$Q = -\frac{\pi \times (1.5R)^3 \times R^3}{4\mu \left[ (1.5R)^2 + R^2 \right]} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.816 \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Por outro lado, para um conduto tal que  $a = b = R$ , podemos substituir em **(II)** e obter

$$Q = -\frac{\pi \times R^3 \times R^3}{4\mu(R^2 + R^2)} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\pi \times R^3 \times R^3}{4\mu(R^2 + R^2)} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\pi R^6}{8\mu R^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \boxed{-\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x}}$$

Observe que esse resultado é idêntico à equação de Poiseuille para condutos cilíndricos. Destarte, para o caso  $a = b = R$ , a equação **(II)** fornece a vazão para uma seção elíptica cujos semieixos  $a$  e  $b$  são iguais – ou seja, uma seção circular!

### ■ Prob. 12

A vazão volumétrica de um conduto circular de raio  $r_o$  é dada pela equação de Poiseuille,

$$Q_{\text{circ}} = -\frac{\pi r_o^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

ao passo que a vazão em um anel de raio interno  $r_1$  e raio externo  $r_2$  é dada pela equação fornecida como dica,

$$Q_{\text{anel}} = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} \left[ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)} \right]$$

Conhecendo essas expressões, basta escrever a razão  $Q_{\text{circ}}/Q_{\text{anel}}$  e simplificar a expressão resultante,

$$\frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{\cancel{\frac{\pi dp}{8\mu dx}} r_o^4}{\cancel{\frac{\pi dp}{8\mu dx}} \left[ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)} \right]}$$

$$\therefore \frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{r_o^4}{\left[ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)} \right]}$$

$$\therefore \frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{r_o^4}{\left\{ r_o^4 - \left(\frac{r_o}{2}\right)^4 - \frac{\left[ r_o^2 - (r_o/2)^2 \right]^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_o/2}\right)} \right\}}$$

$$\therefore \frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{r_o^4}{\left\{ r_o^4 - \frac{r_o^4}{16} - \frac{\left[ r_o^2 - (r_o^2/4) \right]^2}{\ln(2)} \right\}}$$

$$\therefore \frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{r_o^4}{\left[ \frac{15r_o^4}{16} - \frac{(3r_o^2/4)^2}{\ln(2)} \right]}$$

$$\therefore \frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{\cancel{r_o^4}}{\left[ \frac{15\cancel{r_o^4}}{16} - \frac{(9\cancel{r_o^4}/16)}{\ln(2)} \right]}$$

$$\therefore \frac{Q_{\text{circ}}}{Q_{\text{anel}}} = \frac{1}{\left[ \frac{15}{16} - \frac{9}{16\ln(2)} \right]} = \boxed{7.938}$$

Portanto, a vazão no conduto circular é aproximadamente 7.9 vezes maior do que a vazão no conduto anular.

### ■ Prob. 13

A viscosidade dinâmica da água a 20°C é aproximadamente igual a  $10^{-3}$  Pa·s. Uma vez que temos um escoamento permanente, plenamente desenvolvido em um conduto anular, a vazão pode ser obtida a partir da expressão fornecida como dica no Problema 12, isto é,

$$Q = -\frac{\pi (-\Delta p)}{8\mu L} \left[ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)} \right]$$

$$\therefore Q = -\frac{\pi}{8 \times 10^{-3}} \frac{(-100)}{10} \left[ 0.03^4 - 0.02^4 - \frac{(0.03^2 - 0.02^2)^2}{\ln(0.03/0.02)} \right] = 1.31 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\therefore \boxed{Q = 131 \text{ mL/s}}$$

A tensão de cisalhamento no conduto interno é dada pela relação usual

$$\tau_{r_1} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_1} \quad (\text{I})$$

(Ou seja, trata-se do produto entre taxa de deformação e viscosidade dinâmica). O perfil de velocidades  $u(r)$  é

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[ r^2 - r_2^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_1/r_2)} \ln(r/r_2) \right]$$

Podemos diferenciar essa expressão para obter a taxa de deformação, lembrando que  $r = r_1$  na parede interna do conduto anular. Recorrendo ao Mathematica, temos:

$$\text{In[120]:= } \left( \text{Simplify} \left[ \text{D} \left[ \frac{1}{4 * \mu} * \text{dpdx} * \left( r^2 - r_2^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\text{Log}[r_1 / r_2]} \text{Log}[r / r_2] \right), r \right] \right] \right) /. r \rightarrow r_1$$

$$\text{Out[120]:= } \frac{\text{dpdx} \left( 2 r_1 + \frac{-r_1^2 + r_2^2}{r_1 \text{Log}\left[\frac{r_1}{r_2}\right]} \right)}{4 \mu}$$

Substituindo a expressão acima em (I), vem

$$\tau_{r_1} = \cancel{\mu} \times \frac{1}{4 \cancel{\mu}} \frac{dp}{dx} \left[ 2r_1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 \ln(r_1/r_2)} \right]$$

$$\therefore \tau_{r_1} = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \left[ 2r_1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 \ln(r_1/r_2)} \right]$$



$$\therefore \tau_{\eta} = \frac{1}{4} \times \left( \frac{-100}{10} \right) \times \left[ 2 \times 0.02 + \frac{0.03^2 - 0.02^2}{0.02 \times \ln(0.02/0.03)} \right] = 0.0541 \text{ Pa} = \boxed{0.541 \text{ dyn/cm}^2}$$

#### ■ Prob. 14

**Parte (a):** O diâmetro hidráulico do conduto circular em foco é

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4 \times (0.01 \times 0.04)}{2 \times (0.01 + 0.04)} = 0.016 \text{ m}$$

O número de Reynolds do escoamento em foco é

$$R_{D_h} = \frac{\rho V D_h}{\mu} = \frac{1.205 \times 1.3 \times 0.016}{1.8 \times 10^{-5}} = 1390$$

A solução exata fornecida como dica requer a avaliação de uma série infinita; usando o comando *Sum* do Mathematica, podemos calcular os 6 termos iniciais da série para obter uma estimativa suficientemente precisa,

```
In[532]:= b = 0.01 / 2;
```

```
In[533]:= a = 0.04 / 2;
```

```
In[530]:= seq = Table[(2 n + 1), {n, 0, 5}]
```

```
Out[530]= {1, 3, 5, 7, 9, 11}
```

```
In[531]:= Sum[1/k^5 * Tanh[k * Pi * b / (2 * a)], {k, seq}]
```

```
Out[531]= 0.377477
```

Substituindo na equação fornecida como dica, tem-se

$$Q = \frac{4 \times 0.005 \times 0.02^3}{3 \times (1.8 \times 10^{-5})} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left[ 1 - \frac{192 \times 0.02}{\pi^5 \times 0.005} \times 0.3775 \right]$$

$$\therefore Q = (1.552 \times 10^{-4}) \times \left( -\frac{dp}{dx} \right)$$

Mas sabemos que  $V = Q/A = 1.3 \text{ m/s}$ . A área de seção do conduto retangular é  $A = 0.01 \times 0.04 = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . Usando o resultado acima e resolvendo para o gradiente de pressão  $dp/dx$ , temos

$$V = \frac{Q}{A} \rightarrow 1.3 = \frac{(1.552 \times 10^{-4}) \times (-dp/dx)}{4.0 \times 10^{-4}}$$

$$\therefore \left( \frac{dp}{dx} \right) = - \frac{1.3 \times (4.0 \times 10^{-4})}{(1.552 \times 10^{-4})} = \boxed{-3.351 \text{ Pa/m}}$$

**Parte (b):** Na aproximação do diâmetro hidráulico, computamos o coeficiente de atrito de Fanning  $C_f = 16/\text{Re}_{D_h}$  supondo que a seção retangular pode ser equivalentemente modelada como uma seção circular de diâmetro  $D_h = 0.016 \text{ m}$ ,

$$C_f = \frac{16}{\text{Re}_{D_h}} = \frac{16}{1390} = 0.0115$$

Usamos esse resultado para estimar a tensão de cisalhamento média no conduto,

$$\tau_{\text{méd}} = C_f \times \frac{1}{2} \rho V^2 = 0.0115 \times \frac{1}{2} \times 1.205 \times 1.3^2 = 0.0117 \text{ Pa}$$

Portanto, para escoamento completamente desenvolvido, o gradiente de pressão pode ser calculado como

$$\left( \frac{dp}{dx} \right) = - \frac{4\tau_{\text{méd}}}{D_h} = - \frac{4 \times 0.0117}{0.016} = \boxed{-2.925 \text{ Pa/m}}$$

Observe que a solução aproximada via diâmetro hidráulico fornece um (valor absoluto do) gradiente de pressão 12.7% inferior ao resultado ‘verdadeiro’ obtido na parte (a).

### ■ Prob. 15

Sabemos que a tensão de cisalhamento é dada por  $\tau = -r\Delta p/2L$ . Substituindo na relação tensão-deformação,

$$K_{pl} \left( \frac{du}{dr} \right)^n = - \frac{r\Delta p}{2L}$$

$$\therefore \int du = - \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \int r^{1/n} dr$$

Integrando,

$$u = - \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} r^{(n+1)/n} + C \quad \text{(I)}$$

Usando a condição anti-deslizamento, devemos ter  $u = 0$  em  $r = R$ . Portanto,

$$0 = - \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{(n+1)/n} + C$$

$$\therefore C = \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{(n+1)/n}$$

Substituindo em **(I)**,

$$u = - \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} r^{(n+1)/n} + \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{(n+1)/n}$$

$$\therefore u(r) = \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[ R^{(n+1)/n} - r^{(n+1)/n} \right]$$

A equação acima descreve a variação da velocidade axial  $u$  entre a linha central ( $r = 0$ ) e a parede ( $r = R$ ) do conduto. A vazão volumétrica  $Q$  é determinada em seguida,

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr = 2\pi \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ \int_0^R R^{(n+1)/n} r dr - \int_0^R r^{(n+1)/n} r dr \right]$$

$$\therefore Q = 2\pi \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ R^{(n+1)/n} \int_0^R r dr - \int_0^R r^{(2n+1)/n} dr \right]$$

$$\therefore Q = 2\pi \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ R^{(n+1)/n} \times \frac{R^2}{2} - \frac{r^{(3n+1)/n}}{\frac{3n+1}{n}} \right]$$

$$\therefore Q = 2\pi \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{n+1}{n} R^{(3n+1)/n} \right]$$

Simplificando a relação acima,

$$Q = \frac{n\pi R^3}{3n+1} \left( \frac{R\Delta p}{2K_{pl}L} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Com  $Q = 1 \mu\text{L}/\text{min} = 1.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$  e  $R = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ , podemos resolver para a queda de pressão  $\Delta p/L$  para fluidos lei de potência tais que  $n = 0.5, 1.0$  e  $1.5$ .

Recorrendo ao Mathematica, digitamos o seguinte:

```
ln[187]:= Q = 1.67 * 10^-11;
R = 1. * 10^-3;
n = {0.5, 1.0, 1.5};
```

$$\text{Solve}\left[Q = \frac{n[[1]] * \text{Pi} * R^3}{3 * n[[1]] + 1} * \left(\frac{R * \Delta pL}{2 * Kp1}\right)^{\frac{1}{n[[1]]}}, \Delta pL\right]$$

$$\text{Out[214]} = \{\{\Delta pL \rightarrow -326.061 \text{ Kp1}\}, \{\Delta pL \rightarrow 326.061 \text{ Kp1}\}\}$$

$$\text{In[210]} = \text{Solve}\left[Q = \frac{n[[2]] * \text{Pi} * R^3}{3 * n[[2]] + 1} * \left(\frac{R * \Delta pL}{2 * Kp1}\right)^{\frac{1}{n[[2]]}}, \Delta pL\right]$$

$$\text{Out[210]} = \{\{\Delta pL \rightarrow 42.5262 \text{ Kp1}\}\}$$

$$\text{In[211]} = \text{Solve}\left[Q = \frac{n[[3]] * \text{Pi} * R^3}{3 * n[[3]] + 1} * \left(\frac{R * \Delta pL}{2 * Kp1}\right)^{\frac{1}{n[[3]]}}, \Delta pL\right]$$

$$\text{Out[211]} = \{\{\Delta pL \rightarrow 5.44236 \text{ Kp1}\}\}$$

Obviamente, a magnitude do gradiente de pressão requerido aumenta conforme aumenta o expoente  $n$ . Dentre os três fluidos estudados ( $n = 0.5$ , que representa um fluido *pseudoplástico*;  $n = 1$ , que representa um fluido newtoniano; e  $n = 1.5$ , que representa um fluido *dilatante*), o fluido dilatante é aquele que exige a menor bomba para o mesmo conduto.

### ■ Prob. 16

Começamos escrevendo o número de Reynolds nos segmentos  $AB$  e  $BC$  da tubulação,

$$\text{Re}_{AB} = \frac{V_{AB} d_{AB}}{\nu} = \frac{V_{AB} \times 0.12}{1.0 \times 10^{-6}} = 120,000 V_{AB} \quad \text{(I)}$$

$$\text{Re}_{BC} = \frac{V_{BC} d_{BC}}{\nu} = \frac{V_{BC} \times 0.06}{1.0 \times 10^{-6}} = 60,000 V_{BC} \quad \text{(II)}$$

Em seguida, relacionamos as velocidades nos dois segmentos usando a equação da continuidade,

$$V_{AB} A_{AB} = V_{BC} A_{BC}$$

$$\therefore V_{AB} \times \frac{\pi d_{AB}^2}{4} = V_{BC} \times \frac{\pi d_{BC}^2}{4}$$

$$\therefore V_{AB} \times \frac{\pi \times 0.12^2}{4} = V_{BC} \times \frac{\pi \times 0.06^2}{4}$$

$$\therefore V_{AB} = \frac{(\pi \times 0.06^2 / 4)}{(\pi \times 0.12^2 / 4)} V_{BC}$$

$$\therefore V_{AB} = 0.25 V_{BC} \quad \text{(III)}$$

Em seguida, escrevemos a equação de Darcy para descrever as cargas distribuídas,

$$\begin{aligned}(h_L)_{\text{dist}} &= f_{AB} \frac{L_{AB}}{D_{AB}} \frac{V_{AB}^2}{2g} + f_{BC} \frac{L_{BC}}{D_{BC}} \frac{V_{BC}^2}{2g} \\ \therefore (h_L)_{\text{dist}} &= f_{AB} \frac{10}{0.12} \times \frac{V_{AB}^2}{2 \times 9.81} + f_{BC} \frac{12}{0.06} \times \frac{V_{BC}^2}{2 \times 9.81} \\ \therefore (h_L)_{\text{dist}} &= 4.25 f_{AB} V_{AB}^2 + 10.19 f_{BC} V_{BC}^2\end{aligned}$$

Aplicamos a equação de Bernoulli usando os pontos A e C como referências,

$$\begin{aligned}\frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} &= \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{turb}} + h_L \\ \therefore \frac{0}{9810} + \frac{V_{BC}^2}{2 \times 9.81} + (4.25 f_{AB} V_{AB}^2 + 10.19 f_{BC} V_{BC}^2) &= \frac{230,000}{9810} + \frac{(0.25 V_{BC})^2}{2 \times 9.81} + 0 \\ \therefore 0.0510 V_{BC}^2 + 4.25 f_{AB} V_{AB}^2 + 10.19 f_{BC} V_{BC}^2 &= 23.45 + 0.00319 V_{BC}^2 \\ \therefore 0.0510 V_{BC}^2 + 4.25 f_{AB} \times (0.25 V_{BC})^2 + 10.19 f_{BC} V_{BC}^2 &= 23.45 + 0.00319 V_{BC}^2 \\ \therefore 0.0510 V_{BC}^2 + 0.26 f_{AB} V_{BC}^2 + 10.19 f_{BC} V_{BC}^2 &= 23.45 + 0.00319 V_{BC}^2 \\ \therefore (0.0510 + 0.26 f_{AB} + 10.19 f_{BC}) V_{BC}^2 &= 23.45 + 0.00319 V_{BC}^2 \\ \therefore (0.0510 - 0.00319 + 0.26 f_{AB} + 10.19 f_{BC}) V_{BC}^2 &= 23.45 \\ \therefore (0.0478 + 0.26 f_{AB} + 10.19 f_{BC}) V_{BC}^2 &= 23.45 \\ \therefore V_{BC}^2 &= \frac{23.45}{0.0478 + 0.26 f_{AB} + 10.19 f_{BC}} \\ \therefore V_{BC} &= \frac{\sqrt{23.45}}{\sqrt{0.0478 + 0.26 f_{AB} + 10.19 f_{BC}}} \\ \therefore V_{BC} &= \frac{4.84}{\sqrt{0.0478 + 0.26 f_{AB} + 10.19 f_{BC}}} \quad \text{(IV)}\end{aligned}$$

Além das expressões obtidas até o momento, escrevemos a equação de Colebrook para os segmentos de tubulação  $AB$  e  $BC$  (note que  $\varepsilon = 0.002$  mm para alumínio, como indicado na Tabela 1),

$$\frac{1}{\sqrt{f_{AB}}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.002/0.12}{3.7} + \frac{2.51}{Re_{AB} \sqrt{f_{AB}}} \right) \quad \text{(V)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_{BC}}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.002/0.06}{3.7} + \frac{2.51}{Re_{BC} \sqrt{f_{BC}}} \right) \quad \text{(VI)}$$

Temos 6 equações e 6 variáveis – quais sejam, os números de Reynolds  $Re_{AB}$  e  $Re_{BC}$ ; as velocidades  $V_{AB}$  e  $V_{BC}$ ; e os fatores de atrito  $f_{AB}$  e  $f_{BC}$ . Podemos resolver todas as 6 equações simultaneamente por meio do comando *FindRoot* do Mathematica,

```
In[*]:= eq1 = ReAB - 120000 * VAB;
```

```
In[*]:= eq2 = ReBC - 60000 * VBC;
```

```
In[*]:= eq3 = VAB - 0.25 * VBC;
```

```
In[*]:= eq4 = VBC -  $\frac{4.84}{\sqrt{0.0478 + 0.26 * f_{AB} + 10.19 * f_{BC}}}$ ;
```

```
In[*]:= eq5 =  $\frac{1}{\sqrt{f_{AB}}} + 2 \text{Log}10 \left[ \frac{0.002 / 0.12}{3.7} + \frac{2.51}{ReAB * \sqrt{f_{AB}}} \right]$ ;
```

```
In[*]:= eq6 =  $\frac{1}{\sqrt{f_{BC}}} + 2 \text{Log}10 \left[ \frac{0.002 / 0.06}{3.7} + \frac{2.51}{ReBC * \sqrt{f_{BC}}} \right]$ ;
```

```
In[*]:= FindRoot[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6}, {{ReAB, 10^5}, {ReBC, 10^5}, {VAB, 1}, {VBC, 1}, {fAB, 0.01}, {fBC, 0.01}}]
```

```
Out[*]:= {ReAB -> 177461., ReBC -> 354923., VAB -> 1.47884, VBC -> 5.91538, fAB -> 0.0456564, fBC -> 0.0598422}
```

Como mostra o código reproduzido acima, as soluções são  $Re_{AB} \approx 177,500$ ,  $Re_{BC} \approx 350,000$ ,  $V_{AB} \approx 1.48$  m/s,  $V_{BC} \approx 5.92$  m/s,  $f_{AB} \approx 0.0457$  e  $f_{BC} \approx 0.0598$ . Conhecendo a velocidade no segmento  $BC$ , podemos calcular a vazão volumétrica de descarga no ponto C,

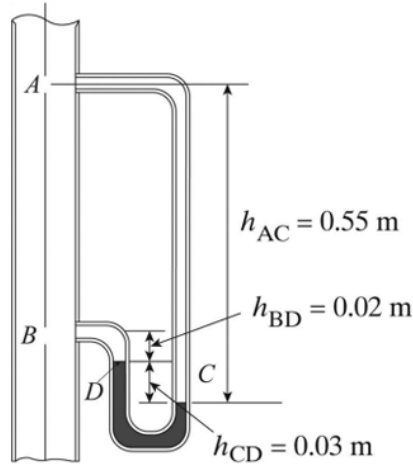
$$Q_{BC} = V_{BC} A_{BC} = 5.92 \times \left( \frac{\pi \times 0.06^2}{4} \right) = 0.0167 \text{ m}^3/\text{s} = \boxed{16.7 \text{ L/s}}$$

### ■ Prob. 17

A perda de carga no filtro pode ser obtida com a relação usual

$$h_L = k_L \frac{V^2}{2g} = k_L \times \frac{3^2}{2 \times 9.81} = 0.459 k_L \quad \text{(I)}$$

Considere a ilustração a seguir.



A diferença de pressão entre os pontos A e B,  $p_A - p_B$ , pode ser obtida se aplicarmos a lei de Stevin ao manômetro,

$$p_A + \rho_w g (h_L)_{AC} = p_B + \rho_{Hg} g (h_L)_{CD} + \rho_w g (h_L)_{BD}$$

$$\therefore p_A + 9810 \times 0.55 = p_B + 13,350 \times 9.81 \times 0.03 + 1000 \times 9.81 \times 0.02$$

$$\therefore p_A + 5400 = p_B + 3930 + 196$$

$$\therefore p_A - p_B = 3930 + 196 - 5400$$

$$\therefore p_A - p_B = -1270$$

$$\therefore p_B - p_A = 1270 \text{ Pa}$$

Aplicamos a equação de Bernoulli e usamos **(I)** para obter o coeficiente de carga localizada  $k_L$  do filtro C,

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_{\text{turb}} + h_L$$

$$\therefore \frac{p_B - p_A}{\gamma} + 0.459 k_L = 0.5$$

$$\therefore \frac{1270}{9810} + 0.459 k_L = 0.5$$

$$\therefore 0.129 + 0.459 k_L = 0.5$$

$$\therefore k_L = \frac{0.5 - 0.129}{0.459} = \boxed{0.808}$$

### ■ Prob. 18

A velocidade do escoamento na tubulação em foco é

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.003}{\pi \times 0.01^2} = 9.55 \text{ m/s}$$

Lembrando que  $\nu \approx 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  para água a 20°C, o número de Reynolds do escoamento é

$$\text{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{9.55 \times 0.02}{1.0 \times 10^{-6}} = 191,000$$

Para ferro galvanizado, a rugosidade relativa no presente caso é  $\varepsilon/D = 0.15/20 = 0.0075$ . Entrando com os valores pertinentes na **calculadora** de equação Colebrook do *Engineering Toolbox*, obtemos o fator de atrito  $f = 0.0348$ . Segue que as perdas por atrito do tipo Moody são dadas por

$$(h_L)_{\text{maior}} = f \frac{L V^2}{D 2g} = 0.0348 \times \frac{7.5}{0.02} \times \frac{9.55^2}{2 \times 9.81} = 60.66 \text{ m}$$

Para contabilizar as perdas localizadas, note que  $k_L = 0.9$  para cotovelos 90° e  $k_L = 0.19$  para válvulas gaveta. As perdas de carga localizadas são, portanto,

$$(h_L)_{\text{local}} = \Sigma k_L \frac{V^2}{2g} = (4 \times 0.9 + 0.19) \times \frac{9.55^2}{2 \times 9.81} = 17.62 \text{ m}$$

Aplicando a equação de Bernoulli entre A e C,

$$\begin{aligned} \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} &= \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{turb}} + h_L \\ \therefore \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}} + z_A + \cancel{h_{\text{bomba}}} &= \cancel{\frac{p_C}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_C^2}{2g}} + \cancel{z_C} + \cancel{h_{\text{turb}}} + h_L \\ \therefore \frac{p_A}{\gamma} + z_A &= h_L \\ \therefore \frac{p_A}{9810} + 2 &= 17.62 + 60.66 \end{aligned}$$

$$\therefore p_A = (17.62 + 60.66 - 2) \times 9810 = 748,000 \text{ Pa} = \boxed{748 \text{ kPa}}$$

### ■ Prob. 19

Lembrando que  $\nu \approx 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  para água a 20°C, o número de Reynolds do escoamento é



$$Re_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{V \times 0.075}{1.0 \times 10^{-6}} = 75,000V \quad \text{(I)}$$

A perda de carga distribuída para um segmento de conduto de 30 m de extensão é

$$(h_L)_{\text{dist}} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \times \frac{30}{0.075} \times \frac{V^2}{2 \times 9.81} = 20.39 fV^2$$

As perdas localizadas, por sua vez, decorrem do cotovelo 90° ( $k_L = 0.9$ ) e da expansão súbita ( $k_L = 1.0$ ) para dentro do tanque,

$$(h_L)_{\text{local}} = \Sigma k_L \frac{V^2}{2g} = (0.9 + 1.0) \times \frac{V^2}{2 \times 9.81} = 0.0968V^2$$

Considere como pontos de referência a superfície livre do reservatório (A) e a superfície livre do tanque (B), de modo que  $z_A = 0$  e  $z_B = 8$  m. Aplicando a equação de Bernoulli entre A e B, vem

$$\begin{aligned} \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} &= \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{turb}} + h_L \\ \therefore 0 + 0 + 0 + h_{\text{bomba}} &= 0 + 0 + 8 + 0 + 20.39 fV^2 + 0.0968V^2 \\ \therefore h_{\text{bomba}} &= 8 + 20.39 fV^2 + 0.0968V^2 \\ \therefore h_{\text{bomba}} &= 8 + (20.39 f + 0.0968)V^2 \end{aligned}$$

Com a potência de saída  $\dot{W} = 3.70$  kW da bomba, temos

$$\begin{aligned} \dot{W} = \gamma_w Q h_{\text{pump}} \rightarrow 3700 &= 9810 \times \left[ (\pi \times 0.0375^2) \times V \right] \times \left[ 8 + (20.39 f + 0.0968)V^2 \right] \\ \therefore 346.7V + 4.195V^3 + 883.7 fV^3 - 3700 &= 0 \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

A última expressão que precisamos é a equação de Colebrook,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re_d \sqrt{f}} \right) \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log_{10} \left( \frac{0.045/75}{3.7} + \frac{2.51}{Re_d \sqrt{f}} \right) \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

Temos 3 equações **(I)**, **(II)** e **(III)** e 3 variáveis ( $Re_d$ ,  $f$  e  $V$ ). Podemos resolver as três equações simultaneamente usando o comando *FindRoot* do Mathematica; utilizamos  $Re_d = 10^5$ ,  $f = 0.01$  e  $V = 1$  m/s como valores iniciais.

```
In[331]= FindRoot[{ReD == 75 000 * V, 346.7 * V + 4.195 * V^3 + 883.7 * f * V^3 - 3700 == 0,
  1/sqrt(f) == -2 * Log10[0.0006/3.7 + 2.51/(ReD * sqrt(f))]}, {{V, 1}, {f, 0.01}, {ReD, 10^5}}]
Out[331]= {V -> 4.65885, f -> 0.0185831, ReD -> 349 414. }
```

Como mostra o código acima, as soluções são  $V \approx 4.66$  m/s,  $f \approx 0.0186$  e  $Re_d \approx 349,400$ . Resta apenas determinar a vazão volumétrica  $Q$ ,

$$Q = VA = 4.66 \times \left( \frac{\pi}{4} \times 0.075^2 \right) = \boxed{0.0206 \text{ m}^3/\text{s}}$$

### ■ Prob. 20

Começamos com o cálculo do número de Reynolds,

$$Re_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{V \times 0.075}{1.0 \times 10^{-6}} = 75,000V \quad \text{(I)}$$

Em seguida, usamos a equação de Darcy para determinar as perdas distribuídas,

$$(h_L)_{\text{dist}} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \times \frac{45}{0.075} \times \frac{V^2}{2 \times 9.81} = 30.58 f V^2$$

Temos de contabilizar as perdas localizadas da entrada *flush* ( $k_L = 0.5$ ), quatro cotovelos  $90^\circ$  ( $k_L = 0.9$ ) e uma válvula globo ( $k_L = 10.0$ ); segue que

$$(h_L)_{\text{local}} = \sum k_L \frac{V^2}{2g} = (0.5 + 4 \times 0.9 + 10.0) \times \frac{V^2}{2 \times 9.81} = 0.719V^2$$

Considere como pontos de referência a superfície livre do reservatório (A) e a saída livre da tubulação (B), de modo que  $z_A = 4.5 - 0.9 = 3.6$  m e  $z_B = 0$ . Aplicando a equação de Bernoulli entre A e B, vem

$$\begin{aligned} \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} &= \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{turb}} + h_L \\ \therefore 0 + 0 + 3.6 + 0 &= 0 + \frac{V^2}{2 \times 9.81} + 0 + 30.58 f V^2 + 0.719V^2 \\ \therefore 3.6 &= 0.0510V^2 + 30.58 f V^2 + 0.719V^2 \\ \therefore 3.6 &= 30.58 f V^2 + 0.77V^2 \\ \therefore 0.77V^2 + 30.58 f V^2 - 3.6 &= 0 \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

Para ferro galvanizado, a rugosidade relativa é  $\varepsilon/D = 0.15/20 = 0.0075$ . A última expressão que podemos enunciar é a equação de Colebrook,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_d \sqrt{f}} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.0075}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_d \sqrt{f}} \right) \quad \text{(III)}$$

Temos 3 equações **(I)**, **(II)**, **(III)** e 3 variáveis ( $\text{Re}_d$ ,  $f$  e  $V$ ). Para resolver as três equações simultaneamente, recorreremos ao comando *FindRoot* do Mathematica; utilizamos  $\text{Re}_d = 10^5$ ,  $f = 0.01$  e  $V = 1$  m/s como valores iniciais.

```
In[341]:= FindRoot[{ReD == 75 000 * V, 0.77 * V^2 + 30.58 * f * V^2 - 3.6 == 0,
  1/sqrt(f) == -2 * Log10[0.0075/3.7 + 2.51/(ReD * sqrt(f))]}, {{V, 1}, {f, 0.01}, {ReD, 10^5}}]
Out[341]:= {V -> 1.39681, f -> 0.0351582, ReD -> 104 761.}
```

Como mostra o código acima, as soluções são  $V \approx 1.40$  m/s,  $f \approx 0.0352$  e  $\text{Re}_d \approx 104,800$ . Resta apenas determinar a vazão volumétrica  $Q$ ,

$$Q = VA = 1.40 \times \left( \frac{\pi}{4} \times 0.075^2 \right) = \boxed{0.00619 \text{ m}^3/\text{s}}$$

### ■ Prob. 21

As velocidades de escoamento nos segmentos  $AB$  e  $BC$  são

$$V_{AB} = \frac{Q}{A_{AB}} = \frac{0.003}{(\pi \times 0.06^2/4)} = 1.06 \text{ m/s}$$

$$V_{BC} = \frac{Q}{A_{BC}} = \frac{0.003}{(\pi \times 0.03^2/4)} = 4.24 \text{ m/s}$$

E os números de Reynolds correspondentes são

$$\text{Re}_{AB} = \frac{V_{AB} d_{AB}}{\nu} = \frac{1.06 \times 0.06}{1.0 \times 10^{-6}} = 63,600$$

$$\text{Re}_{BC} = \frac{V_{BC} d_{BC}}{\nu} = \frac{4.24 \times 0.03}{1.0 \times 10^{-6}} = 127,200$$

Lembrando que  $\varepsilon = 0.0015$  mm para tubulações de chumbo, a rugosidade relativa do segmento  $AB$  é  $\varepsilon/D_{AB} = 0.0015/60 = 2.5 \times 10^{-5}$ . Inserindo esse valor e o Reynolds

$Re_{AB}$  na equação de Colebrook (ou no diagrama de Moody) e resolvendo para o fator de atrito, extrai-se  $f_{AB} = 0.0199$ . De modo semelhante, substituímos a rugosidade relativa do segmento  $BC$ ,  $\varepsilon/D_{BC} = 0.0015/30 = 5 \times 10^{-5}$ , e o Reynolds  $Re_{BC} = 127,200$  na equação de Colebrook e resolvemos para o fator de atrito  $f_{BC} = 0.0174$ . Prosseguimos ao cálculo das perdas de carga distribuídas no sistema,

$$(h_L)_{\text{dist}} = f_{AB} \frac{L_{AB}}{D_{AB}} \frac{V_{AB}^2}{2g} + f_{BC} \frac{L_{BC}}{D_{BC}} \frac{V_{BC}^2}{2g}$$

$$\therefore (h_L)_{\text{dist}} = 0.0199 \times \frac{11}{0.06} \times \frac{1.06^2}{2 \times 9.81} + 0.0174 \times \frac{13}{0.03} \times \frac{4.24^2}{2 \times 9.81} = 7.12 \text{ m}$$

Para computar as cargas localizadas, devemos levar em conta os três cotovelos ( $k_L = 0.9$ ) e a válvula globo ( $k_L = 10$ ); o resultado é

$$(h_L)_{\text{loc}} = 2 \times 0.9 \times \frac{1.06^2}{2 \times 9.81} + 0.9 \times \frac{4.24^2}{2 \times 9.81} + 10 \times \frac{4.24^2}{2 \times 9.81} = 10.1 \text{ m}$$

Por fim, aplicamos a equação de Bernoulli entre as extremidades A e C da tubulação para estimar a pressão  $p_A$ ,

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{turb}} + h_L$$

$$\therefore \frac{p_A}{9810} + \frac{1.06^2}{2 \times 9.81} + 11 + 0 = \frac{0}{9810} + \frac{4.24^2}{2 \times 9.81} + 0 + (7.12 + 10.1)$$

$$\therefore \frac{p_A}{9810} + 11.06 = 18.14$$

$$\therefore p_A = (18.14 - 11.06) \times 9810 = 69,450 \text{ Pa} = \boxed{69.5 \text{ kPa}}$$

### ■ Prob. 22

Como a vazão em A e B é a mesma, podemos determinar a velocidade de escoamento em B com a equação da continuidade,

$$Q_A = Q_B \rightarrow 5.0 \times \left[ \frac{\pi \times (0.75/2)^2}{4} \right] = V_B \times \left[ \frac{\pi \times (0.5/2)^2}{4} \right]$$

$$\therefore 0.552 = 0.0491 V_B$$

$$\therefore V_B = \frac{0.552}{0.0491} = 11.2 \text{ ft/s}$$

Os coeficientes de perda localizada no cotovelo, tê, bico e válvula gaveta completamente aberta são respectivamente iguais a 0.9, 1.8, 0.6 e 0.19. Segue que a perda de carga no segmento AD é dada por

$$(h_L)_{AD} = \left( f_{AD} \frac{L_{AD}}{D} + \sum k_L \right) \frac{V_A^2}{2g} = \left[ 0.016 \times \frac{3}{(0.75/12)} + 0.9 \right] \times \frac{5^2}{2 \times 32.2} = 0.648 \text{ ft}$$

ao passo que a perda de carga no segmento DB é

$$(h_L)_{DB} = \sum k_L \frac{V_B^2}{2g} = (1.8 + 0.19 + 0.6) \times \frac{11.2^2}{2 \times 32.2} = 5.04 \text{ ft}$$

Aplicando a equação de Bernoulli entre A e B, sabendo que  $p_B = 0$ ,  $z_A = 0$  e  $z_B = (3 - 0.25) = 2.75$  ft, vem

$$\begin{aligned} \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} &= \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{turb}} + (h_L)_{AB} \\ \therefore \frac{p_A}{(1.93 \times 32.2)} + \frac{5^2}{2 \times 32.2} &= \frac{11.3^2}{2 \times 32.2} + (3 - 0.25) + 0.648 + 5.04 \\ \therefore \frac{p_A}{(1.93 \times 32.2)} + 0.388 &= 10.4 \\ \therefore p_A &= (1.93 \times 32.2) \times (10.4 - 0.388) = 622 \text{ lb/ft}^2 = \boxed{4.32 \text{ psi}} \end{aligned}$$

Lembrando que 1 psi  $\approx$  6895 Pa, a pressão acima é equivalente a  $\sim$ 29.8 kPa.

### ■ Prob. 23

A vazão na entrada C do loop é

$$Q_C = 3.0 \times \left( \frac{\pi \times 0.075^2}{4} \right) = 0.0133 \text{ m}^3/\text{s}$$

Como informa o enunciado, a vazão  $Q_C$  deve ser dividida igualmente entre os dois segmentos do loop, logo,

$$Q_{CBD} = Q_{CAD} = \frac{Q_C}{2} = \frac{0.0133}{2} = 0.00665 \text{ m}^3/\text{s}$$

Segue que a velocidade média nos dois segmentos é

$$V_{CBD} = V_{CAD} = \frac{Q_{CBD}}{A} = \frac{0.00665}{(\pi \times 0.075^2 / 4)} = 1.51 \text{ m/s}$$

e o número de Reynolds de ambos os segmentos é

$$(\text{Re}_d)_{CBD} = (\text{Re}_d)_{CAD} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.51 \times 0.075}{1.0 \times 10^{-6}} = 113,300$$

Lembrando que  $\varepsilon = 0.15$  mm para ferro galvanizado, temos a rugosidade relativa  $\varepsilon/D = 0.15/75 = 0.002$ . Recorrendo à [calculadora](#) de equação de Colebrook disponível no *Engineering Toolbox*, obtemos o fator de atrito  $f = 0.0249$ . Portanto, as perdas distribuídas nos segmentos *CBD* e *CAD* são tais que

$$(h_L)_{CBD} = f \frac{L_{CBD}}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.0249 \times \frac{60}{0.075} \times \frac{1.50^2}{2 \times 9.81} = 2.284 \text{ m}$$

$$(h_L)_{CAD} = f \frac{L_{CAD}}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.0249 \times \frac{120}{0.075} \times \frac{1.50^2}{2 \times 9.81} = 4.569 \text{ m}$$

Como sabemos que o loop encontra-se no plano horizontal, segue que não há variações de carga de elevação. Ademais, sabemos que as perdas localizadas podem ser desprezadas. Portanto, para que os dois escoamentos tenham vazões idênticas, a bomba do segmento *CAD* deve suprir a carga adicional necessária para que esse segmento tenha energia suficiente para transportar a mesma vazão que o segmento *BCD*. Essa carga adicional, que denotamos  $h_{bomba}$ , é dada por

$$h_{bomba} = (h_L)_{CAD} - (h_L)_{CBD} = 4.569 - 2.284 = 2.285 \text{ m}$$

Sem a carga adicional  $h_{bomba}$ , o segmento *CAD* não teria carga hidráulica suficiente para transportar a mesma vazão que o segmento *CBD*. Resta apenas calcular a potência de saída da bomba,

$$\dot{W} = \gamma_w Q h_{\text{pump}} = 9810 \times 0.00665 \times 2.285 = \boxed{149 \text{ W}}$$

### ■ Prob. 24

Pela equação da continuidade, a soma das vazões  $Q_B$  e  $Q_C$  que enveredam pelos ramos *ABD* e *ACD*, respectivamente, deve ser igual à vazão  $Q_A$  do segmento original *A*, isto é,

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

Os números de Reynolds do escoamento nos segmentos *ABD* e *ACD* são

$$\text{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.05 \times V}{1.0 \times 10^{-6}} = 50,000V$$

↓

$$\text{Re}_{dB} = 50,000V_B \quad \text{(I)}$$

$$\text{Re}_{dC} = 50,000V_C \quad \text{(II)}$$

ao passo que as perdas de carga são

$$(h_L)_B = f_B \frac{L_B}{D} \frac{V_B^2}{2g} = f_B \times \frac{8}{0.05} \times \frac{V_B^2}{2 \times 9.81} = 8.155 f_B V_B^2$$

$$(h_L)_C = f_C \frac{L_C}{D} \frac{V_C^2}{2g} = f_C \times \frac{12}{0.05} \times \frac{V_C^2}{2 \times 9.81} = 12.23 f_C V_C^2$$

Uma vez que os condutos estão em série, as perdas de carga  $(h_L)_B$  e  $(h_L)_C$  devem ser iguais,

$$(h_L)_B = (h_L)_C \rightarrow 8.155 f_B V_B^2 = 12.23 f_C V_C^2$$

$$\therefore f_B V_B^2 = \frac{12.23}{8.155} f_C V_C^2$$

$$\therefore f_B V_B^2 = 1.5 f_C V_C^2 \quad \text{(III)}$$

Escrevendo a equação de Bernoulli entre as estações A e D, vem

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{bomba}} = \frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2g} + z_D + h_{\text{turb}} + h_L$$

$$\therefore \frac{p_A}{\gamma} = \frac{p_D}{\gamma} + 12.23 f_C V_C^2$$

$$\therefore \frac{p_A - p_D}{\gamma} = 12.23 f_C V_C^2$$

$$\therefore (p_A - p_D) = 12.23 f_C V_C^2 \gamma$$

$$\therefore \underbrace{(p_A - p_D)}_{=75 \text{ kPa}} = 12.23 \times 9810 \times f_C V_C^2$$

$$\therefore 75,000 = 120,000 f_C V_C^2$$

$$\therefore f_C V_C^2 = 0.625 \quad \text{(IV)}$$

Observando que a altura de rugosidade do ferro galvanizado é  $\varepsilon = 0.15$  mm e a rugosidade relativa pode ser obtida como  $\varepsilon/D = 0.15/50 = 0.003$ , substituímos na equação de Colebrook para obter duas expressões adicionais,

$$\frac{1}{\sqrt{f_B}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.003}{3.7} + \frac{2.51}{Re_{dB} \sqrt{f_B}} \right) \quad \text{(V)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_C}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.003}{3.7} + \frac{2.51}{Re_{dC} \sqrt{f_C}} \right) \quad \text{(VI)}$$

Temos agora 6 equações **(I), (II), (III), (IV), (V)** e **(VI)** e 6 variáveis – quais sejam, os números de Reynolds  $Re_{dB}$  e  $Re_{dC}$ ; as velocidades  $V_B$  e  $V_C$ ; e os fatores de atrito  $f_B$  e  $f_C$ . Podemos resolver as 6 equações simultaneamente com o comando *FindRoot* do Mathematica, como mostra o código a seguir. Note que utilizamos 100,000 como valores iniciais para os números de Reynolds, 1.0 m/s para as velocidades e 0.1 para os fatores de atrito.

```
In[431]:= eq1 = ReynDB - 50 000 * VB;
```

```
In[432]:= eq2 = ReynDC - 50 000 * VC;
```

```
In[433]:= eq3 = fB * VB^2 - 1.5 * fC * VC^2;
```

```
In[434]:= eq4 = fC * VC^2 - 0.625;
```

```
In[437]:= eq5 = 1/sqrt[fB] + 2 * Log10[0.003/3.7 + 2.51/(ReynDB * sqrt[fB])];
```

```
In[438]:= eq6 = 1/sqrt[fC] + 2 * Log10[0.003/3.7 + 2.51/(ReynDC * sqrt[fC])];
```

```
In[439]:= FindRoot[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6}, {{VB, 1.0}, {VC, 1.0}, {fB, 0.01}, {fC, 0.01}, {ReynDB, 10^5}, {ReynDC, 10^5}}]
```

```
Out[439]= {VB -> 5.93372, VC -> 4.83565, fB -> 0.0266267, fC -> 0.0267282, ReynDB -> 296 686., ReynDC -> 241 783.}
```

Como mostra o código acima, os resultados são  $V_B \approx 5.93$  m/s,  $V_C \approx 4.84$  m/s,  $f_B \approx 0.0266$ ,  $f_C \approx 0.0267$ ,  $Re_{dB} \approx 296,700$  e  $Re_{dC} \approx 241,800$ . Podemos usar as velocidades obtidas para estimar as vazões  $Q_B$  e  $Q_C$ ,

$$Q_B = V_B A_B = 5.93 \times \left( \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 \right) = \boxed{0.0116 \text{ m}^3/\text{s}}$$

$$Q_C = V_C A_C = 4.84 \times \left( \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 \right) = \boxed{0.0095 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Por fim, concluímos que a vazão total em A é  $Q_A = Q_B + Q_C = 0.0116 + 0.0095 = 0.0211 \text{ m}^3/\text{s} = 21.1 \text{ L/s}$ .



■ **Prob. 25**

Pela equação da continuidade, é fácil ver que as velocidades de escoamentos são relacionadas por

$$V_A = V_B + V_E$$

Aplicando a equação de Darcy-Weisbach aos três segmentos A, B e E, vem

$$(h_L)_A = f_A \frac{L_A}{D} \frac{V_A^2}{2g} = f_A \times \frac{10}{0.1} \times \frac{V_A^2}{2 \times 9.81} = 5.097 f_A V_A^2$$

$$(h_L)_B = f_B \frac{L_B}{D} \frac{V_B^2}{2g} = f_B \times \frac{(1+8)}{0.1} \times \frac{V_B^2}{2 \times 9.81} = 4.587 f_B V_B^2$$

$$(h_L)_E = f_E \frac{L_E}{D} \frac{V_E^2}{2g} = f_E \times \frac{8}{0.1} \times \frac{V_E^2}{2 \times 9.81} = 4.077 f_E V_E^2$$

Sabendo que B e E estão em paralelo, as perdas de carga nesses dois segmentos devem ser iguais; portanto,

$$(h_L)_B = (h_L)_E \rightarrow 4.587 f_B V_B^2 = 4.077 f_E V_E^2$$

$$\therefore f_B V_B^2 = \frac{4.077}{4.587} f_E V_E^2$$

$$\therefore f_B V_B^2 = 0.888 f_E V_E^2$$

$$\therefore V_B = 0.942 \sqrt{\frac{f_E}{f_B}} V_E \quad \text{(I)}$$

Substituindo na equação da continuidade enunciada no início da solução,

$$V_A = V_B + V_E = 0.942 \sqrt{\frac{f_E}{f_B}} V_E + V_E = \left( 0.942 \sqrt{\frac{f_E}{f_B}} + 1 \right) V_E \quad \text{(II)}$$

Proseguindo, escrevemos a equação de Bernoulli para os pontos C (superfície livre do reservatório superior) e D (superfície livre do reservatório inferior) usando a elevação do conduto AE como datum,

$$\frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + h_{\text{pump}} = \frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2g} + z_D + h_{\text{turb}} + h_L$$

$$\therefore 7 = 3 + 5.097 f_A V_A^2 + 4.077 f_E V_E^2$$

$$\therefore 5.097 f_A V_A^2 + 4.077 f_E V_E^2 = 4 \quad \text{(III)}$$

Precisamos também dos números de Reynolds para os segmentos A, B e E,

$$\text{Re}_{dA} = \frac{V_A d}{\nu} = \frac{V_A \times 0.1}{1.0 \times 10^{-6}} = 10^5 V_A \quad \text{(IV)}$$

$$\text{Re}_{dB} = \frac{V_B d}{\nu} = \frac{V_B \times 0.1}{1.0 \times 10^{-6}} = 10^5 V_B \quad \text{(V)}$$

$$\text{Re}_{dE} = \frac{V_E d}{\nu} = \frac{V_E \times 0.1}{1.0 \times 10^{-6}} = 10^5 V_E \quad \text{(VI)}$$

Observando que a altura de rugosidade do ferro galvanizado é  $\varepsilon = 0.15$  mm e a rugosidade relativa é dada por  $\varepsilon/D = 0.15/100 = 0.0015$ , substituímos na equação de Colebrook para obter três expressões adicionais,

$$\frac{1}{\sqrt{f_A}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.003}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_{dA} \sqrt{f_A}} \right) \quad \text{(VII)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_B}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.003}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_{dB} \sqrt{f_B}} \right) \quad \text{(VIII)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_E}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.003}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_{dE} \sqrt{f_E}} \right) \quad \text{(IX)}$$

Temos agora 9 equações ((I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII) e (IX)) e 9 variáveis – quais sejam, os números de Reynolds  $\text{Re}_{dA}$ ,  $\text{Re}_{dB}$ , e  $\text{Re}_{dE}$ ; as velocidades  $V_A$ ,  $V_B$  e  $V_E$ ; e os fatores de atrito  $f_A$ ,  $f_B$  e  $f_E$ . Resolvemos as 9 equações simultaneamente com o comando *FindRoot* do Mathematica, como mostra o código a seguir. Note que utilizamos 100,000 como valores iniciais para os números de Reynolds, 1.0 m/s para as velocidades e 0.1 para os fatores de atrito.

$$\text{In[473]:= eq1} = \text{VB} - 0.942 * \sqrt{\frac{\text{fE}}{\text{fB}}} * \text{VE};$$

$$\text{In[472]:= eq2} = \text{VA} - \left( 0.942 * \sqrt{\frac{\text{fE}}{\text{fB}}} + 1 \right) * \text{VE};$$

$$\text{In[474]:= eq3} = 5.097 * \text{fA} * \text{VA}^2 + 4.077 * \text{fE} * \text{VE}^2 - 4;$$

$$\text{In[467]}:= \text{eq4} = \text{ReynDA} - 10^5 * \text{VA};$$

$$\text{In[468]}:= \text{eq5} = \text{ReynDB} - 10^5 * \text{VB};$$

$$\text{In[469]}:= \text{eq6} = \text{ReynDE} - 10^5 * \text{VE};$$

$$\text{In[480]}:= \text{eq7} = \frac{1}{\sqrt{f_A}} + 2 * \text{Log10} \left[ \frac{0.0015}{3.7} + \frac{2.51}{\text{ReynDA} * \sqrt{f_A}} \right];$$

$$\text{In[481]}:= \text{eq8} = \frac{1}{\sqrt{f_B}} + 2 * \text{Log10} \left[ \frac{0.0015}{3.7} + \frac{2.51}{\text{ReynDB} * \sqrt{f_B}} \right];$$

$$\text{In[482]}:= \text{eq9} = \frac{1}{\sqrt{f_E}} + 2 * \text{Log10} \left[ \frac{0.0015}{3.7} + \frac{2.51}{\text{ReynDE} * \sqrt{f_E}} \right];$$

$$\text{In[483]}:= \text{FindRoot}[\{\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}, \text{eq4}, \text{eq5}, \text{eq6}, \text{eq7}, \text{eq8}, \text{eq9}\}, \{\{\text{VA}, 1\}, \{\text{VB}, 1\}, \{\text{VE}, 1\}, \{f_A, 0.1\}, \{f_B, 0.1\}, \{f_E, 0.1\}, \{\text{ReynDA}, 10^5\}, \{\text{ReynDB}, 10^5\}, \{\text{ReynDE}, 10^5\}\}]$$

$$\text{Out[483]}= \{\text{VA} \rightarrow 5.39861, \text{VB} \rightarrow 2.61729, \text{VE} \rightarrow 2.78132, f_A \rightarrow 0.022146, f_B \rightarrow 0.0225641, f_E \rightarrow 0.0225175, \text{ReynDA} \rightarrow 539861., \text{ReynDB} \rightarrow 261729., \text{ReynDE} \rightarrow 278132.\}$$

Os resultados são  $V_A \approx 5.40$  m/s,  $V_B \approx 2.62$  m/s,  $V_E \approx 2.78$  m/s,  $f_A \approx 0.0221$ ,  $f_B \approx 0.0226$ ,  $f_E = 0.0225$ ,  $Re_{dA} \approx 539,900$ ,  $Re_{dB} \approx 261,700$  e  $Re_{DE} \approx 278,100$ . Podemos utilizar a velocidade  $V_A = 5.40$  m/s para estimar a vazão oriunda do reservatório superior,

$$Q_A = V_A A_A = 5.40 \times \left( \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \right) = \boxed{0.0424 \text{ m}^3/\text{s}}$$

## ■ Referências (★ → Livro altamente recomendado)

1. HIBBELER, R.C. **Fluid Mechanics**. 2. ed. Pearson, 2017. ★
2. MUNSON, B.R.; YOUNG, D.F.; OKIISHI, T.H.; HUEBSCH, W.W. **Fundamentals of Fluid Mechanics**. 6. ed. John Wiley and Sons, 2009.
3. POTTER, M.C. **Mechanics of Fluids**. 4. ed. Cengage Learning, 2012.
4. PRITCHARD, P.J. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. 8. ed. John Wiley and Sons, 2011.
5. WHITE, F.M. **Fluid Mechanics**. 8. ed. McGraw-Hill, 2016. ★
6. WHITE, F.M. **Viscous Fluid Flow**. 3. ed. McGraw-Hill, 2006.

## ➔ Referências de cada problema

Problema	Ref.	Problema	Ref.
1	[5]	14	[6]
2	[5]	15	[4]
3	[5]	16	[1]
4	[5]	17	[1]
5	[5]	18	[1]
6	[5]	19	[1]
7	[5]	20	[1]
8	[3]	21	[1]
9	[2]	22	[1]
10	[3]	23	[1]
11	[4]	24	[1]
12	[3]	25	[1]
13	[3]		

## ■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

**WhatsApp:** (61) 981247059

**Email:** [lucas\\_0150@hotmail.com](mailto:lucas_0150@hotmail.com)

