



Lista de Exercícios Resolvidos 4
Forças em Superfícies Submersas

Lucas Monteiro Nogueira

■ **Problemas**

Problemas Fáceis

1. Tanque com Água e Óleo
2. Barragem Triangular
3. Barragem Trapezoidal
4. Portão Separando Dois Fluidos I
5. Portão Retangular Inclinado I
6. Portão Semicírculo

Problemas Intermediários

7. Portão Retangular
8. Portão Arco Circular
9. Vertedor Cilíndrico
10. Portão Retangular Inclinado II
11. Superfície Quarto de Círculo I
12. Superfície Quarto de Círculo II

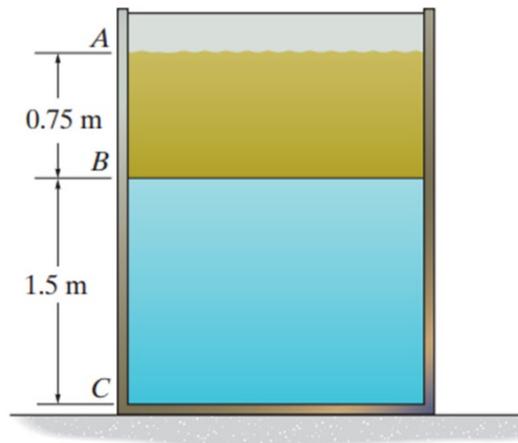
Problemas Difíceis

13. Paredão Parabólico de Concreto
14. Barragem Triangular Generalizada
15. Portão Separando Dois Fluidos II
16. Análise Tridimensional de uma Superfície Esférica



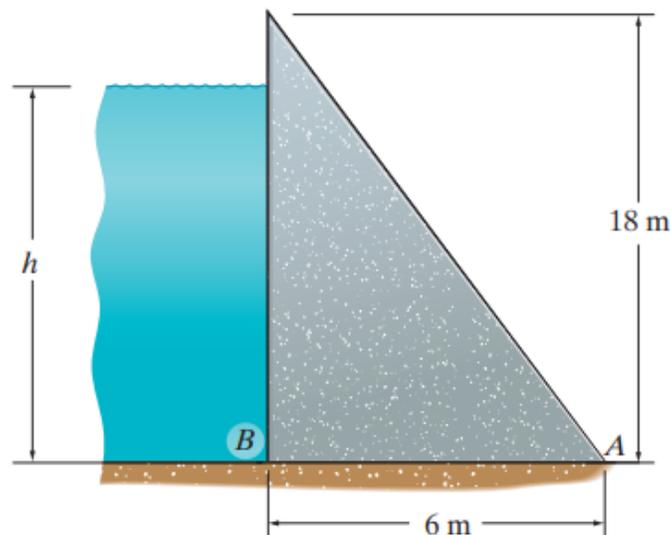
■ Problema 1 (Tanque com Água e Óleo)

O tanque de armazenamento ilustrado a seguir contém óleo e água com as profundidades mostradas. Determine a força resultante que ambos os líquidos exercem na parede ABC do tanque sabendo que a largura do tanque na direção perpendicular ao papel é 1.25 m. Determine também a linha de ação da força medida em relação à superfície livre do tanque. Use $\rho_{ol} = 900 \text{ kg/m}^3$ como a densidade do óleo.



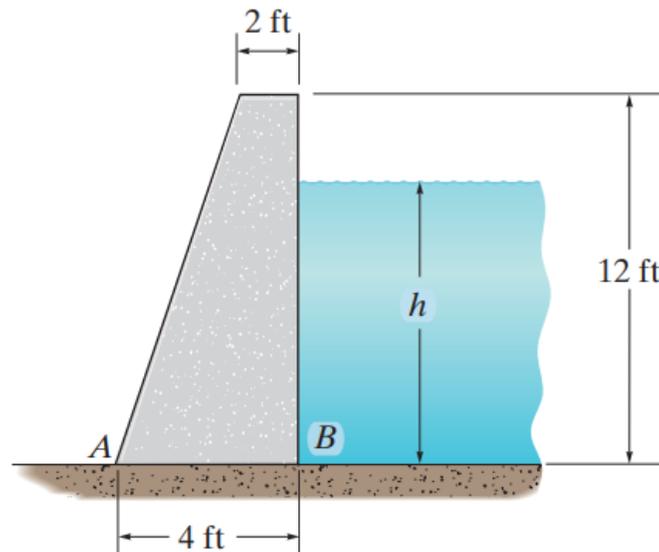
■ Problema 2 (Barragem Triangular)

Determine a altura crítica h que fará a barragem de concreto tombar devido à pressão hidrostática do corpo d'água represado. A densidade do concreto é $\rho_c = 2400 \text{ kg/m}^3$.



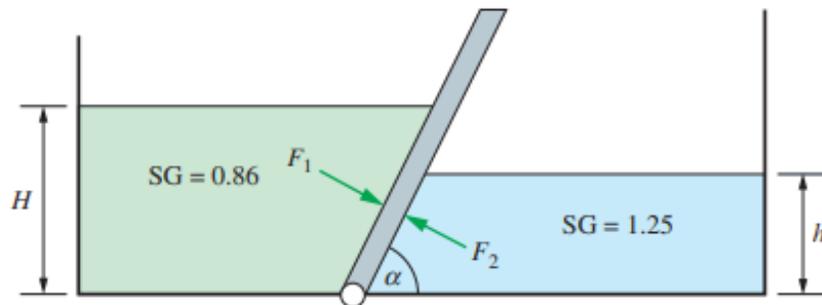
■ Problema 3 (Barragem Trapezoidal)

Determine a altura crítica h do nível d'água que fará com que a barragem ilustrada a seguir tombe devido à pressão hidrostática. O peso específico do concreto é $\gamma_c = 150 \text{ lb/ft}^3$.



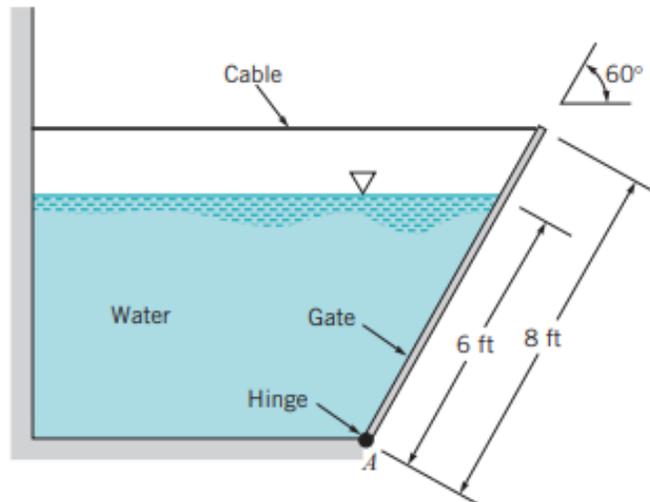
■ Problema 4 (Portão Separando Dois Fluidos I)

O peso do portão que separa dois fluidos com os valores de gravidade específica indicados na figura é tal que o sistema se mantém em equilíbrio estático. Sabendo que $F_1/F_2 = 1.70$, determine a razão h/H .



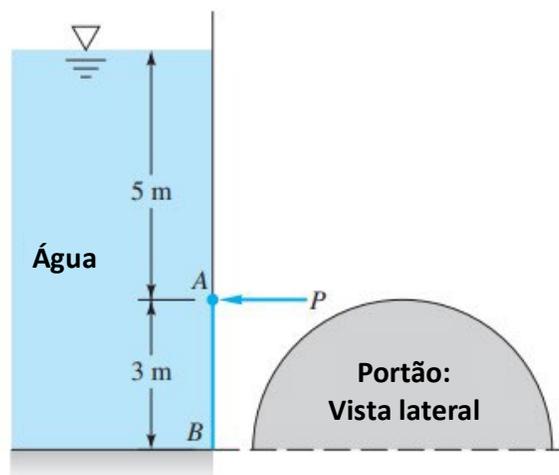
■ Problema 5 (Portão Retangular Inclinado I)

Um portão homogêneo retangular de 4 ft de largura e 8 ft de comprimento com peso igual a 800 lbm é mantido no lugar por um cabo horizontal flexível, como mostra a figura a seguir. A água represada exerce uma carga hidrostática sobre o portão, que é articulado no ponto A. Determine a tensão no cabo.



■ Problema 6 (Portão Semicírculo)

O portão AB na figura a seguir é semicircular, articulado em B e mantido por uma força horizontal P no ponto A. Qual é a força P necessária para manter o portão em equilíbrio?

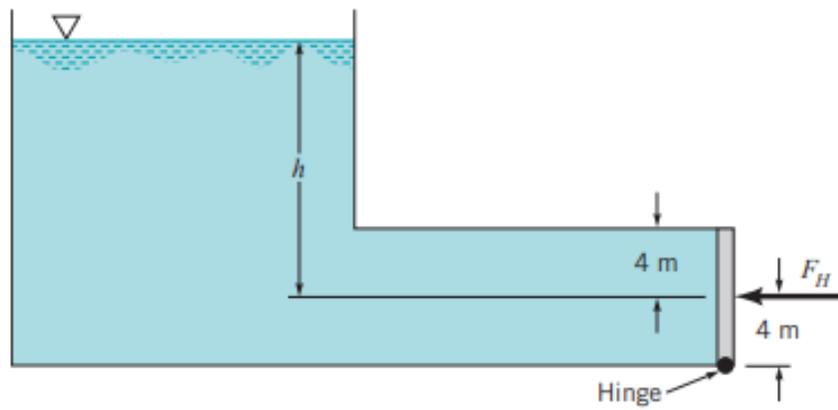


■ Problema 7 (Portão Retangular)

Um portão retangular de 3 m de largura e 8 m de altura é localizado na saída de uma passagem retangular conectada à porção inferior de um tanque cheio d'água, conforme ilustrado a seguir. O portão é articulado em sua base e é mantido fechado por meio de uma força horizontal F_H aplicada ao centro do portão. O valor máximo de F_H é 3500 kN.

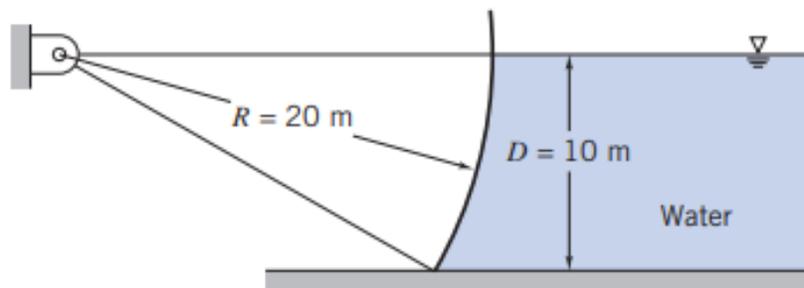
(a) Determine a máxima profundidade h acima do centro do portão praticável para mantê-lo fechado.

(b) Sua resposta em (a) mudaria se o portão fosse articulado no topo ao invés da base? Justifique.



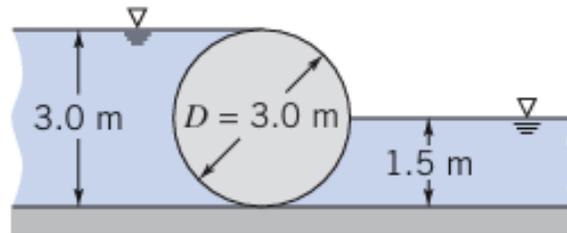
■ Problema 8 (Portão Arco Circular)

O portão de uma barragem hidrelétrica tem formato de arco circular articulado no centro, como mostra a figura a seguir. A largura do portão (isto é, a dimensão na direção perpendicular ao papel) é $w = 35$ m. Encontre a magnitude, direção e linha de ação da força hidrostática exercida pela água represada.



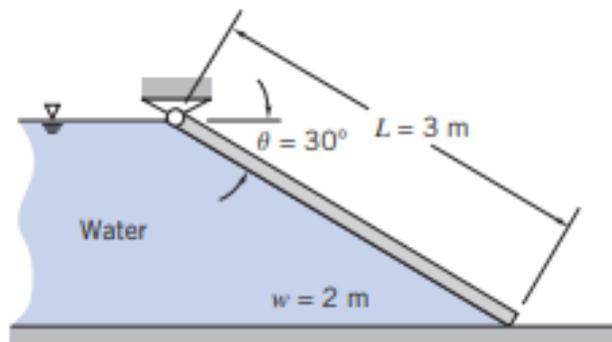
■ Problema 9 (Vertedor Cilíndrico)

Considere o vertedor cilíndrico de diâmetro 3 m e comprimento 6 m ilustrado a seguir. Sabendo que o fluido à esquerda tem gravidade específica 1.6 e o fluido à direita tem SG 0.8, encontre a magnitude e direção da força resultante no cilindro.



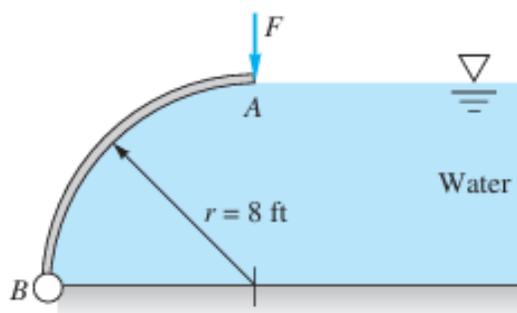
■ Problema 10 (Portão Retangular Inclinado II)

Um portão plano de espessura uniforme w sustenta uma massa de água em repouso, como ilustra a figura a seguir. Encontre o peso mínimo necessário para que o portão se mantenha fechado.



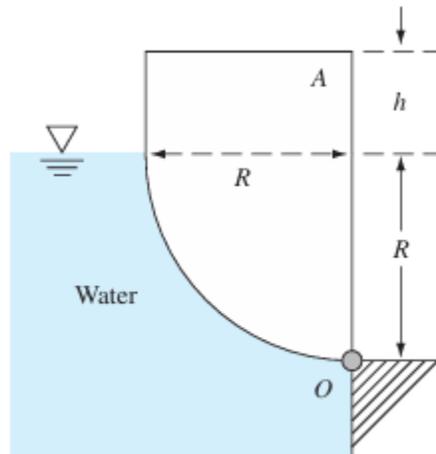
■ Problema 11 (Superfície Quarto de Círculo I)

O portão AB mostrado na figura a seguir tem 10 ft de espessura (direção perpendicular ao papel) e é articulado em B . Encontre a força vertical F em A necessária para impedir a abertura do portão. O portão é homogêneo e pesa 3000 lbf.



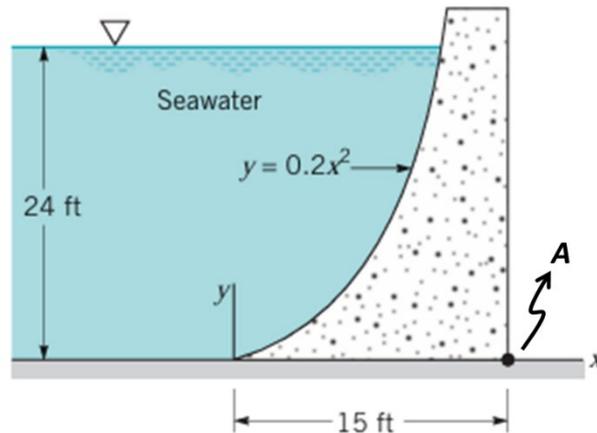
■ **Problema 12 (Superfície Quarto de Círculo II)**

O corpo uniforme A na figura a seguir tem largura b na direção perpendicular ao papel e está em equilíbrio estático quando posicionado com uma dobradiça no ponto O . Qual é a gravidade específica desse corpo se **(a)** $h = 0$; e **(b)** $h = R$?



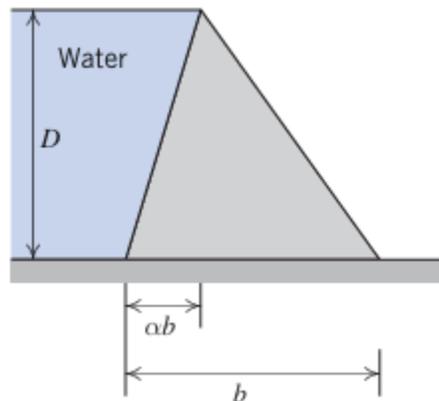
■ **Problema 13 (Paredão Parabólico de Concreto)**

Um paredão de concreto (peso específico $\gamma = 150 \text{ lb/ft}^3$) possui superfície interna curvada em forma de parábola. O paredão sustenta uma massa de água de profundidade igual a 24 ft, como mostra a figura a seguir. Determine o momento da força exercida pela água com relação ao ponto A . (Lembre-se que o peso específico da água salgada em unidades imperiais é $\gamma = 64.0 \text{ lb/ft}^3$.)



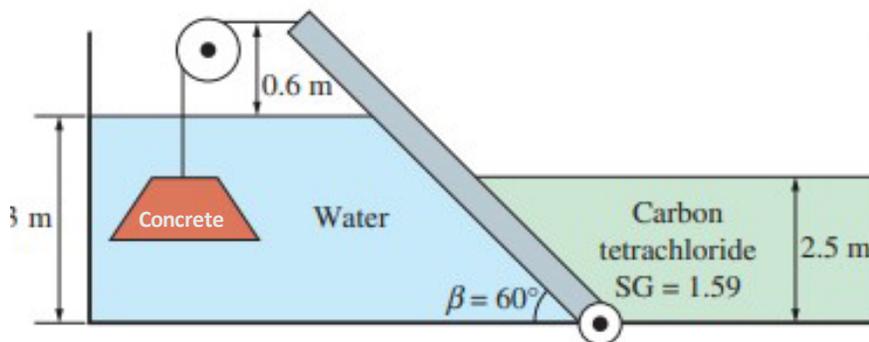
■ Problema 14 (Barragem Triangular Generalizada)

Uma barragem de concreto será erigida para represar uma massa de água com altura D , como ilustrado a seguir. Para facilitar a construção, as paredes da barragem devem ser planas. Os engenheiros responsáveis pelo projeto consideram três geometrias para a seção da barragem: um retângulo; um triângulo reto com a hipotenusa em contato com a água; um triângulo retângulo com o cateto vertical em contato com a água; e, finalmente, um triângulo escaleno com as medidas ilustradas a seguir. Qual é a geometria que exigirá a menor quantidade de concreto? No que concerne ao dimensionamento com triângulo escaleno, obtenha a seção A como função de a e encontre a área de seção mínima. Em todos os cálculos, use $\overline{SG} \approx 2.4$ como a gravidade específica do concreto.



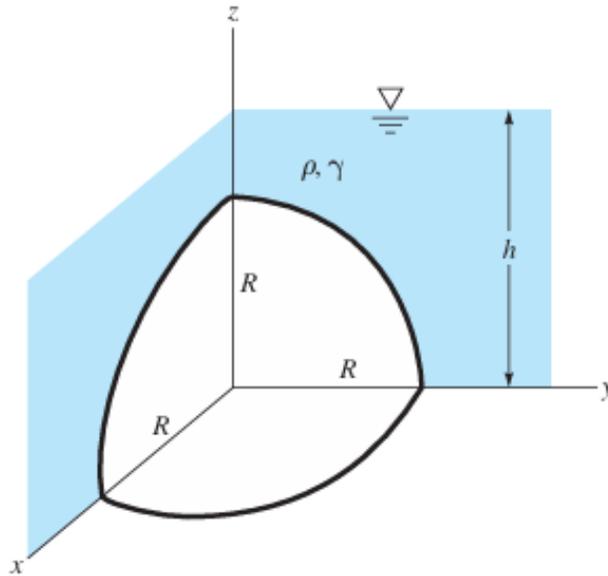
■ Problema 15 (Portão Separando Dois Fluidos II)

Considere um portão inclinado de 1 m de largura e peso desprezível que separa uma camada de água e uma camada de tetracloreto de carbono, como mostra a figura a seguir. Qual deve ser o volume do corpo de concreto ($SG = 2.4$) imerso em água para que o portão se mantenha em equilíbrio na posição mostrada?



■ **Problema 16 (Análise Tridimensional de uma Superfície Esférica)**

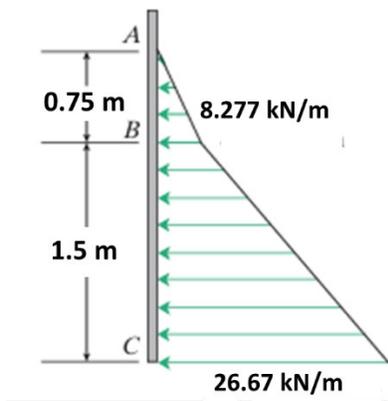
Na figura a seguir, é ilustrada uma casca esférica de raio R imersa em um líquido de peso específico γ e profundidade $h > R$. Encontre uma expressão analítica para a força hidrostática resultante na superfície da casca. Ademais, localize a linha de ação da força hidrostática.



■ **Soluções**

■ **Prob. 1**

As forças distribuídas na parede ABC estão ilustradas abaixo.



Os carregamentos por unidade de altura são, para a região AB,

$$w_B = \rho_o g h_{AB} b = 900 \times 9.81 \times 0.75 \times 1.25 = 8277 \text{ N/m}$$

e, para a região BC,

$$w_C = w_B + \rho_w g h_{BC} b = 8277 + 1000 \times 9.81 \times 1.5 \times 1.25 = 26,671 \text{ N/m}$$

O carregamento distribuído pode ser dividido em três regiões 1, 2 e 3, cada qual associada com uma força concentrada F_1 , F_2 e F_3 . A força F_1 é oriunda da carga distribuída triangular entre A e B e pode ser determinada como

$$F_1 = \frac{1}{2} \times 0.75 \times 8.277 = 3.104 \text{ kN}$$

A força F_2 é oriunda da carga distribuída retangular entre B e C e pode ser determinada como

$$F_2 = 1.5 \times 8.277 = 12.42 \text{ kN}$$

A força F_3 é oriunda da carga distribuída triangular entre B e C e pode ser determinada como

$$F_3 = \frac{1}{2} \times 1.5 \times (26.671 - 8.277) = 13.80 \text{ kN}$$

A resultante F_R é

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 3.104 + 12.42 + 13.80 = \boxed{29.32 \text{ kN}}$$

Cada uma das componentes F_1 , F_2 e F_3 atua no centroide do carregamento distribuído correspondente. As alturas y_1 , y_2 e y_3 mensuradas a partir da superfície livre do tanque são

$$y_1 = \frac{2}{3} \times 0.75 = 0.50 \text{ m}$$

$$y_2 = 0.75 + \frac{1}{2} \times 1.5 = 1.50 \text{ m}$$

$$y_3 = 0.75 + \frac{2}{3} \times 1.5 = 1.75 \text{ m}$$

A localização \bar{y}_R da resultante F_R pode ser obtida ao somar momentos relativamente ao ponto A. O resultado é

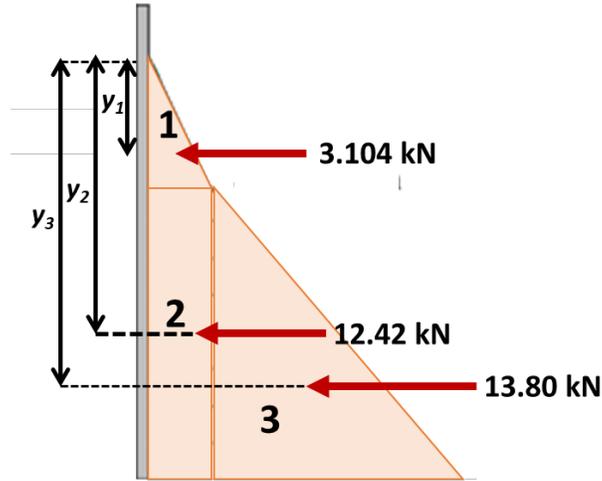
$$\bar{y}_R F_R = \Sigma(yF)$$

$$\therefore \bar{y}_P \times 29.32 = 0.5 \times 3.104 + 1.5 \times 12.42 + 1.75 \times 13.80$$

$$\therefore \bar{y}_P \times 29.32 = 44.33$$

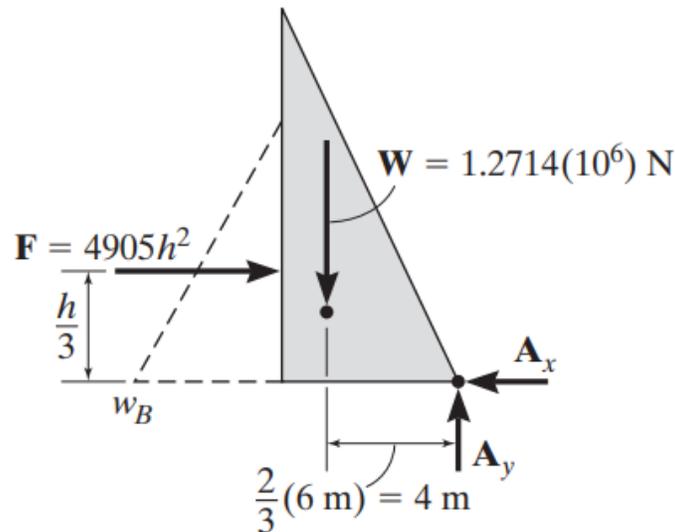
$$\therefore \bar{y}_P = \frac{44.33}{29.32} = \boxed{1.51 \text{ m}}$$

A resultante F_R atua à altura de 1.51 m mensurada a partir da superfície livre do tanque.



■ Prob. 2

Por conveniência, analisamos um segmento de barragem com espessura $b = 1$ m. Considere o seguinte diagrama de corpo livre.



A intensidade do carregamento distribuído que atua sobre a barragem é

$$w_B = \rho_w g h b = 1000 \times 9.81 \times h \times 1.0 = 9810h \text{ [N/m]}$$

A resultante F do carregamento distribuído triangular é

$$F = \frac{1}{2} w_B h = \frac{1}{2} \times 9810h \times h = 4905h^2 \text{ [N]}$$

O volume do segmento de barragem é $V = (1/2) \times (6 \times 18) \times 1 = 54 \text{ m}^3$, e o peso correspondente é

$$W = \rho_C g V = 2400 \times 9.81 \times 54 = 1.27 \times 10^6 \text{ N}$$

A barragem tombará relativamente ao ponto A. Haja vista o diagrama de corpo livre acima, somamos momentos relativamente a esse ponto e obtemos a altura crítica h ,

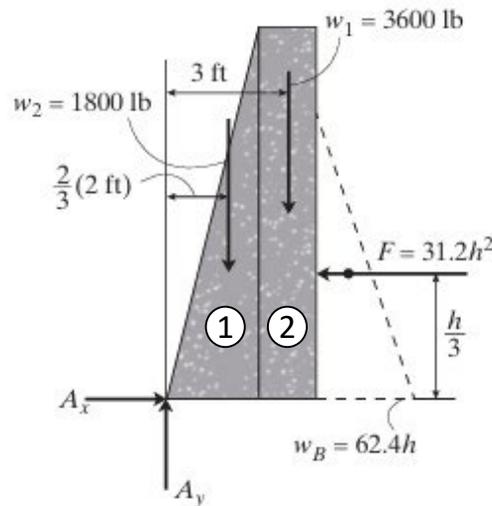
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow (1.27 \times 10^6) \times 4 - 4905h^2 \times \left(\frac{h}{3}\right) = 0$$

$$\therefore 5.08 \times 10^6 - 1635h^3 = 0$$

$$\therefore h = \sqrt[3]{\frac{5.08 \times 10^6}{1635}} = \boxed{14.6 \text{ m}}$$

■ Prob. 3

Considere o seguinte diagrama de corpo livre.



Por conveniência, analisamos um segmento de barragem com espessura $b = 1 \text{ ft}$. Assim sendo, a intensidade do carregamento distribuído na base da barragem é

$$w_B = \gamma_w h b = 62.4 \times h \times 1 = 62.4h \text{ [lb/ft]}$$

A força resultante referente a esse carregamento triangular é

$$F = \frac{1}{2} w_B h = \frac{1}{2} \times 62.4h \times h = 31.2h^2 \text{ [lb]}$$

É conveniente subdividir a barragem em duas partes, 1 e 2, cujos pesos são

$$W_1 = \gamma_c \nabla_1 = 150 \times (2 \times 12 \times 1) = 3600 \text{ lb}$$

$$W_2 = \gamma_c \nabla_2 = 150 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 12 \times 1 \right) = 1800 \text{ lb}$$

A barragem tombará relativamente ao ponto A. Recorrendo ao diagrama de corpo livre acima, podemos somar momentos e resolver para a profundidade h ,

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 31.2h^2 \times \frac{h}{3} - 3600 \times 3 - 1800 \times \left(\frac{2}{3} \times 2 \right) = 0$$

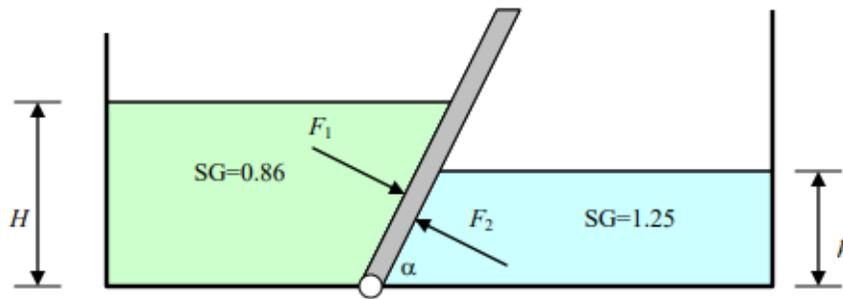
$$\therefore 10.4h^3 - 10,800 - 2400 = 0$$

$$\therefore 10.4h^3 = 13,200$$

$$\therefore h = \sqrt[3]{\frac{13,200}{10.4}} = 10.83 \approx \boxed{10.8 \text{ ft}}$$

■ Prob. 4

O sistema em questão é ilustrado a seguir.



A força F_1 é dada por

$$F_1 = \gamma_1 h_{CG} A = \gamma_1 \times \frac{H}{2} \times \left[\frac{H}{\sin(\alpha)} b \right] = \frac{\gamma_1 H^2 b}{2 \sin(\alpha)}$$

ao passo que F_2 é tal que

$$F_2 = \gamma_2 h_{CG} A = \gamma_2 \times \frac{h}{2} \times \left[\frac{h}{\sin(\alpha)} b \right] = \frac{\gamma_2 h^2 b}{2 \sin(\alpha)}$$

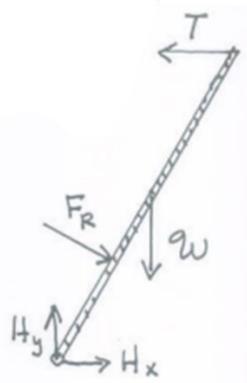
Sabendo que $F_1/F_2 = 1.7$, podemos empregar as expressões acima e escrever

$$\frac{F_1}{F_2} = 1.70 \rightarrow \frac{\frac{\gamma_1 H^2 b}{2 \sin(\alpha)}}{\frac{\gamma_2 h^2 b}{2 \sin(\alpha)}} = 1.70$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\frac{\gamma_1 H^2}{2 \sin(\alpha)}}{\frac{\gamma_2 h^2}{2 \sin(\alpha)}} &= 1.70 \\ \therefore \frac{\gamma_1 \left(\frac{H}{h}\right)^2}{\gamma_2} &= 1.70 \\ \therefore \frac{H}{h} &= \sqrt{1.70 \times \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = \sqrt{1.70 \times \frac{1.25}{0.86}} = \boxed{1.57} \end{aligned}$$

■ Prob. 5

Um diagrama de corpo livre do portão é mostrado a seguir.



A força resultante exercida no portão é $F_R = \gamma h_c A$, onde $h_c = (6/2) \times \sin 60^\circ = 2.60$ ft. Portanto,

$$F_R = \gamma h_c A = 62.4 \times 2.60 \times (6 \times 4) = 3890 \text{ lbf}$$

Para localizar a linha de ação da resultante hidrostática F_R , escrevemos

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c = \frac{(4 \times 6^3)/12}{3 \times (6 \times 4)} + 3 = 4.0 \text{ ft}$$

Para que o portão se mantenha em equilíbrio, a soma de momentos em relação à articulação A deve ser nula; ou seja,

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow T \times 8 \sin 60^\circ = W \times (4 \times \cos 60^\circ) + F_R \times 2$$

$$\therefore T = \frac{800 \times (4 \times \cos 60^\circ) + 3890 \times 2}{8 \sin 60^\circ}$$

$$\therefore \boxed{T = 1350 \text{ lbf}}$$

■ Prob. 6

O centroide de um semicírculo é $4R/3\pi$ a partir do fundo; no presente caso, $R = 3$ m e o centroide é $4 \times 3/(3\pi) = 1.273$ m. Segue que o centroide está $3.0 - 1.273 = 1.727$ m abaixo da linha de ação da força P . A força hidrostática F exercida pela água no portão é

$$F = \gamma h_{CG} A = 9810 \times (5.0 + 1.273) \times \left(\frac{\pi}{2} \times 3^2 \right) = 870,000 \text{ N} = 870 \text{ kN}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia de um semicírculo relativamente a um eixo que passa pelo centroide é

$$I_{xx} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4 \approx 0.1098 R^4$$

No presente caso, $I_{xx} = 0.1098 \times 3^4 = 8.89 \text{ m}^4$. A linha de ação da força F ocorre abaixo do CG do portão e é dada por

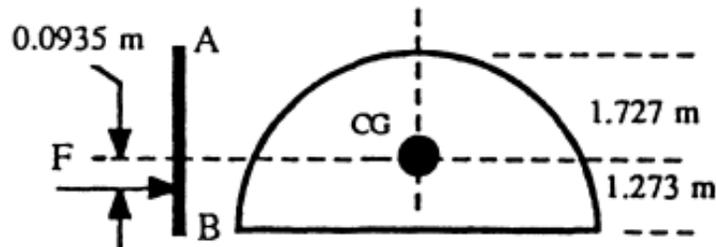
$$y_{CP} = -\frac{I_{xx}}{h_{CG} A} = -\frac{0.988}{(5 + 1.727) \times \left(\frac{\pi}{2} \times 3^2 \right)} = -0.0935 \text{ m}$$

Somamos momentos relativamente ao fundo B e resolvemos para a força de suporte P ,

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow 870,000 \times (1.273 - 0.0935) - 3P = 0$$

$$\therefore 1.026 \times 10^6 - 3P = 0$$

$$\therefore P = \frac{1.026 \times 10^6}{3} = 342,000 \text{ N} = \boxed{342 \text{ kN}}$$



■ Prob. 7

Parte (a): O sistema em questão é ilustrado no diagrama de corpo livre à direita. Somando momentos relativamente à dobradiça na base, vê-se que o momento horário aplicado pela resultante hidrostática F_R deve ser igual ao momento antihorário associado à força F_H que mantém o portão fechado. Matematicamente,

$$\begin{aligned}\Sigma M_H = 0 &\rightarrow 4 \times F_H = \ell \times F_R \\ 4 \times F_H &= \ell \times F_R \quad \text{(I)}\end{aligned}$$

O valor de F_R é dado por

$$F_R = \gamma h A = 9.81 \times h_c \times (3 \times 8) = 235.4h \quad [\text{kN}]$$

Essa força concentra-se em um centro de pressão y_c tal que

$$\begin{aligned}y_R &= \frac{I_{xx}}{y_c A} + y_c = \frac{(3 \times 8^3)/12}{y_c \times (3 \times 8)} + y_c \\ \therefore y_R &= \frac{5.33}{h} + h\end{aligned}$$

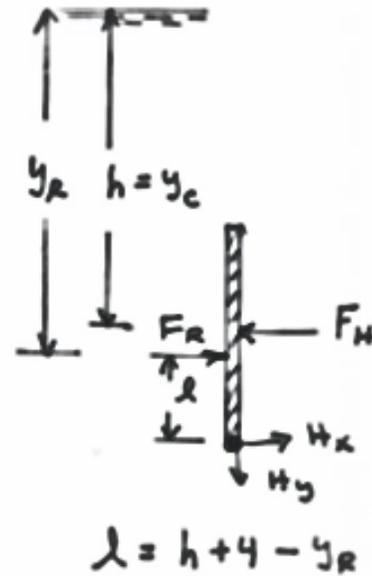
Sendo $\ell = h + 4 - y_R$, usamos o resultado acima para obter

$$\begin{aligned}\ell &= h + 4 - y_R = h + 4 - \left(\frac{5.33}{h} + h \right) \\ \therefore \ell &= \cancel{h} + 4 - \frac{5.33}{h} - \cancel{h} \\ \therefore \ell &= 4 - \frac{5.33}{h}\end{aligned}$$

Substituindo em (I),

$$\begin{aligned}4 \times F_H = \ell \times F_R &\rightarrow 4 \times F_H = \left(4 - \frac{5.33}{h} \right) \times 235.4h \\ \therefore 4F_H &= -1255 + 941.6h\end{aligned}$$

Mas F_H não pode ser maior que 3500 kN; assim sendo, o valor máximo admissível de h torna-se



$$\therefore 4F_H = -1255 + 941.6h \rightarrow h = \frac{4F_H + 1255}{941.6}$$

$$\therefore h = \frac{4 \times 3500 + 1255}{941.6} = \boxed{16.2 \text{ m}}$$

Parte (b): A análise acima pode ser facilmente adaptada a um portão articulado na extremidade superior. Considere o diagrama de corpo livre ao lado. Somando momentos relativamente à nova articulação H , temos

$$\Sigma M_H = 0 \rightarrow 4 \times F_H = \ell_1 \times F_R \quad \text{(II)}$$

onde ℓ_1 é dado por

$$\ell_1 = y_R - (h - 4) = \left(\frac{5.33}{h} + h \right) - h + 4$$

$$\therefore \ell_1 = \frac{5.33}{h} + 4$$

Substituindo em (II),

$$4 \times F_H = \ell_1 \times F_R \rightarrow 4 \times F_H = \left(\frac{5.33}{h} + 4 \right) \times 235.4h$$

$$\therefore 4F_H = 1255 + 941.6h$$

$$\therefore h = \frac{4F_H - 1255}{941.6}$$

$$\therefore h = \frac{4 \times 3500 - 1255}{941.6} = \boxed{13.5 \text{ m}}$$

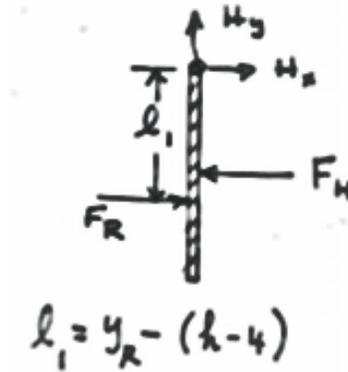
Se o portão fosse articulado por cima ao invés de ser articulado pela base, a máxima profundidade h permissível seria aproximadamente 17% menor.

■ Prob. 8

A pressão hidrostática a uma profundidade h sob a superfície livre da barragem é dada por

$$p = \rho gh = \rho gR \sin(\theta)$$

e a força correspondente é $dF = pdA$. Prosseguimos para analisar as componentes horizontal e vertical da força F . Primeiramente, na direção horizontal,



$$dF_H = dF \cos(\theta) = p \times dA \times \cos(\theta) = \rho g R \sin(\theta) w R \cos(\theta) d\theta$$

$$\therefore dF_H = \rho g w R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

O ângulo θ varia de $\theta = 0$ até $\theta = \arcsin(10/20) = 30^\circ$. Preparamos a integral

$$F_H = \rho g w R^2 \int_{\theta=0}^{30^\circ} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad \text{(I)}$$

Integrando de $\theta = 0^\circ$ até $\theta = 30^\circ$,

$$\int_{\theta=0}^{30^\circ} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = -\frac{1}{2} \left[\cos^2(\theta) \right]_{\theta=0}^{30^\circ} = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{1}{8}$$

Substituindo em **(I)**,

$$F_H = \rho g w R^2 \int_{\theta=0}^{30^\circ} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = \rho g w R^2 \times \frac{1}{8}$$

$$\therefore F_H = \frac{\rho g w R^2}{8}$$

$$\therefore F_H = \frac{1000 \times 9.81 \times 35 \times 20^2}{8} = 1.72 \times 10^7 \text{ N} = \boxed{17.2 \text{ MN}}$$

Prosseguindo de modo semelhante com a força F_V na direção vertical, temos

$$dF_V = dF \sin(\theta) = p \times dA \times \sin(\theta) = \rho g R \sin(\theta) w R \sin(\theta) d\theta$$

$$\therefore dF_V = \rho g w R^2 \sin^2(\theta) d\theta$$

$$\therefore F_V = \rho g w R^2 \int_{\theta=0^\circ}^{30^\circ} \sin^2(\theta) d\theta \quad \text{(II)}$$

onde

$$\int_{\theta=0^\circ}^{30^\circ} \sin^2(\theta) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_{\theta=0^\circ}^{30^\circ} = \frac{(\pi/6)}{2} - \frac{1}{4} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \int_{\theta=0^\circ}^{30^\circ} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\sqrt{3}/2}$$

$$\therefore \int_{\theta=0^{\circ}}^{30^{\circ}} \sin^2(\theta) d\theta = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

Substituindo em **(II)**,

$$\therefore F_V = \rho g w R^2 \int_{\theta=0^{\circ}}^{30^{\circ}} \sin^2(\theta) d\theta = \rho g w R^2 \times \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$\therefore F_V = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \rho g w R^2$$

$$\therefore F_V = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \times 1000 \times 9.81 \times 35 \times 20^2 = 6.22 \times 10^6 \text{ N} = \boxed{6.22 \text{ MN}}$$

A força resultante F_R é tal que

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{17.2^2 + 6.22^2} = \boxed{18.29 \text{ MN}}$$

e a linha de ação α é dada por

$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_V}{F_H}\right) = \arctan\left(\frac{6.22}{17.2}\right) = \boxed{19.9^{\circ}}$$

A força descreve um ângulo de aproximadamente 20° com relação à horizontal.

■ Prob. 9

Devemos contabilizar separadamente as forças verticais e horizontais exercidas por cada fluido. A força horizontal exercida pelo fluido 1 (o fluido à esquerda na figura do enunciado) é dada por

$$F_{H1} = p_C A = \rho_1 g \frac{D}{2} \times DL = \frac{1}{2} \rho_1 g D^2 L$$

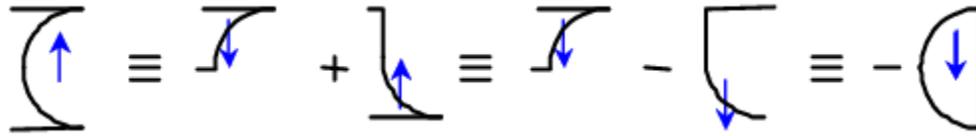
$$\therefore F_{H1} = \frac{1}{2} \times (1.6 \times 1000) \times 9.81 \times 3^2 \times 6 = 423,800 \text{ N} \approx 424 \text{ kN}$$

A força horizontal exercida pelo fluido 2 (o fluido à direita na figura do enunciado), por sua vez, é

$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_2 g D^2 = \frac{1}{2} \times (0.8 \times 1000) \times 9.81 \times 1.5^2 \times 6 = 52.97 \text{ kN} \approx 53.0 \text{ kN}$$

A resultante horizontal é $F_H = F_{H1} - F_{H2} = 424 - 53 = 371 \text{ kN}$. Prosseguindo, sabe-se que as forças verticais F_V são iguais à força hidrostática exercida pelo fluido 'acima' da

superfície cilíndrica. Usamos um pequeno ‘experimento de abstração’ para encontrar tal força:



Assim sendo, a força vertical F_{V1} exercida pelo fluido 1 é

$$F_{V1} = \overline{SG}_1 \rho_w g \frac{(\pi D^2/4)}{2} L = 1.6 \times 1000 \times 9.81 \times \frac{(\pi \times 3^2/4)}{2} \times 6 = 333 \text{ kN}$$

A força vertical F_{V2} exercida pelo fluido 2 é

$$F_{V2} = \overline{SG}_2 \rho_w g \frac{(\pi D^2/4)}{4} L = 0.8 \times 1000 \times 9.81 \times \frac{(\pi \times 3^2/4)}{4} \times 6 = 83.2 \text{ kN}$$

A resultante vertical é $F_V = F_{V1} + F_{V2} = 333 + 83.2 = 416 \text{ kN}$. A resultante final imposta ao vertedor cilíndrico é

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{371^2 + 416^2} = \boxed{557 \text{ kN}}$$

e a inclinação α em relação à horizontal é

$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_V}{F_H}\right) = \arctan\left(\frac{416}{371}\right) = \boxed{48.27^\circ}$$

■ Prob. 10

Para que haja equilíbrio, a soma de momentos em relação à dobradiça O deve ser nula. Duas forças produzem momentos em relação à dobradiça: a primeira é o peso W do portão, a qual é a grandeza que buscamos determinar, e a segunda é a força hidrostática F , que pode ser obtida se integramos o elemento de força dF ao longo da direção y paralela ao portão. Matematicamente,

$$\begin{aligned} \Sigma M_O = 0 &\rightarrow W \left(\frac{L}{2}\right) \cos(\theta) = \int y dF \\ \therefore W &= \frac{2}{L \cos(\theta)} \int y dF \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

O elemento de força dF é dado pelo produto entre a pressão hidrostática p e o elemento infinitesimal de área dA sobre o qual ela atua; portanto,

$$dF = p \times dA = \rho gh \times dA = \rho g y \sin(\theta) \times dA$$

Substituindo em **(I)**,

$$W = \frac{2}{L \cos(\theta)} \int y dF = \frac{2 \sec(\theta)}{L} \int y \times \rho g y \sin(\theta) dA$$

$$\therefore W = \frac{2 \rho g \sin(\theta)}{L \cos(\theta)} \int y^2 dA$$

$$\therefore W = \frac{2 \rho g w \tan(\theta)}{L} \int_0^L y^2 dy$$

$$\therefore W = \frac{2 \rho g w \tan(\theta)}{L} \times \frac{L^3}{3}$$

$$\therefore W = \frac{2 \rho g w L^2 \tan(\theta)}{3}$$

Substituindo os valores pertinentes,

$$W = \frac{2 \times 1000 \times 9.81 \times 2 \times 3^2 \times \tan(30^\circ)}{3} = 67,966 \text{ N} \approx \boxed{68.0 \text{ kN}}$$

O portão deve ter uma massa próxima de $68,000/9.81 \approx 6930 \text{ kg} \approx 6.9$ toneladas métricas.

■ Prob. 11

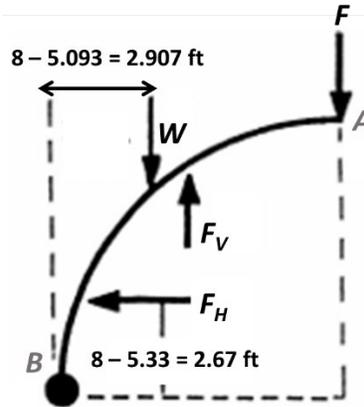
A componente *horizontal* da força hidrostática que age em AB é computada como se AB fosse um segmento retangular vertical, de modo que $h_{CG} = 8/2 = 4 \text{ ft}$ e (não esqueça que o peso da água em unidades USCS é $\gamma \approx 62.4 \text{ lb/ft}^3$)

$$F_H = \gamma h_{CG} A_{\text{vert}} = 62.4 \times \frac{8}{2} \times (8 \times 10) = 19.97 \text{ lb}$$

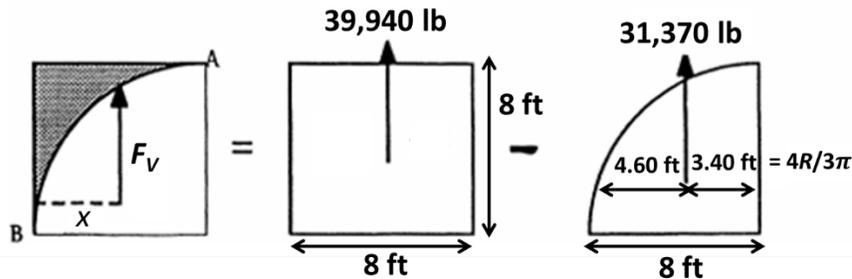
O centro de pressão dessa força horizontal é

$$y_{cp} = \frac{I_{xx} \sin(90^\circ)}{h_{CG} A} = \frac{bh^3/12 \times 1}{h_{CG} A}$$

$$\therefore y_{cp} = \frac{10 \times 8^3/12 \times 1}{4 \times (8 \times 10)} = 1.33 \text{ ft}$$



Segue que a força F_H age a uma distância $(8/2) + 1.33 = 5.33$ ft abaixo do ponto A. Prosseguindo à análise da força vertical F_V , sabemos que esta é igual à fatia de água acima do portão, a qual pode ser modelada como a seguinte diferença de volumes:



Fazendo referência à figura acima, verificamos que F_V é

$$F_V = 62.4 \times 8 \times (8 \times 10) - 62.4 \times \left(\frac{\pi \times 8^2}{4} \right) \times 10 = 39,940 \text{ lb} - 31,370 \text{ lb}$$

$$\therefore F_V = 8570 \text{ lb}$$

Ainda com referência à diferença de volumes acima, podemos somar momentos com relação a B e localizar a linha de ação x de recém-obtida força F_V ,

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow 8570x = 39,940 \times 4.0 - 31,370 \times 4.60$$

$$\therefore x = 1.785 \text{ ft}$$

Por fim, contabilizamos o peso $W = 3000$ lbf do portão, cujo centroide dista $2R/\pi = 2 \times 8/\pi = 5.093$ ft da força F , ou $8 - 5.093 = 2.907$ ft do ponto B. Podemos então somar momentos relativamente à dobradiça B e encontrar a força F desejada,

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow 8 \times F + 3000 \times 2.907 - 8570 \times 1.785 - 19,970 \times 2.67 = 0$$

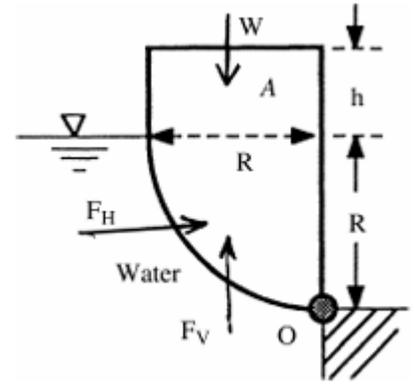
$$\therefore \boxed{F = 7490 \text{ lb}}$$

■ Prob. 12

Partes (a) e (b): Como mostra o diagrama ao lado, o volume de água na lateral do corpo produz uma força horizontal F_H e uma força vertical F_V . Há ainda o próprio peso W do corpo. As forças F_H e F_V são tais que

$$F_H = \gamma \frac{R}{2} Rb \quad \text{em } \frac{R}{3} \text{ acima de O}$$

$$F_V = \gamma \frac{\pi R^2}{4} b \quad \text{em } \frac{4R}{3\pi} \text{ à esquerda de O}$$



Para que haja equilíbrio, a soma de momentos em relação à dobradiça O deve ser nula; portanto, somando momentos e resolvendo para o peso específico γ_s do corpo,

$$\Sigma M_O = 0 \rightarrow \frac{\gamma R^2 b}{2} \times \left(\frac{R}{3}\right) + \frac{\pi \gamma R^2 b}{4} \times \left(\frac{4R}{3\pi}\right) - \frac{\gamma_s \pi R^2 b}{4} \times \left(\frac{4R}{3\pi}\right) - \gamma_s R h b \times \left(\frac{R}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\gamma R^3 b}{6} + \frac{\gamma R^3 b}{3} - \frac{\gamma_s R^3 b}{3} - \frac{\gamma_s R^2 h b}{2} = 0$$

$$\therefore \frac{\gamma R^3 b}{2} - \frac{\gamma_s R^3 b}{3} - \frac{\gamma_s R^2 h b}{2} = 0$$

$$\therefore \frac{\gamma R b}{2} - \frac{\gamma_s R b}{3} - \frac{\gamma_s h b}{2} = 0$$

$$\therefore \frac{\gamma R b}{2} = \frac{\gamma_s R b}{3} + \frac{\gamma_s h b}{2}$$

$$\therefore \frac{\gamma R}{2} = \gamma_s \left(\frac{R}{3} + \frac{h}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{\gamma_s}{\gamma} = \frac{2}{R} \times \left(\frac{R}{3} + \frac{h}{2}\right)^{-1}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\gamma_s}{\gamma} = \left(\frac{2}{3} + \frac{h}{R}\right)^{-1}}$$

Podemos resolver a parte (a) substituindo $h = 0$ na expressão acima,

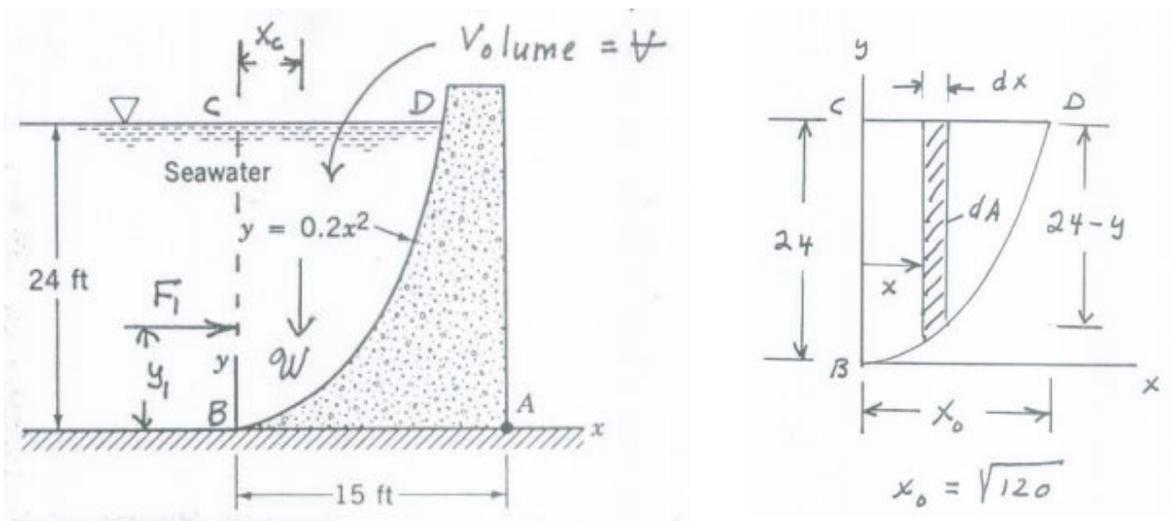
$$\frac{\gamma_s}{\gamma} = \left(\frac{2}{3} + \frac{0}{R} \right)^{-1} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\overline{SG} = \frac{3}{2}}$$

De modo semelhante, substituímos $h = R$ para resolver a parte (b),

$$\overline{SG} = \frac{\gamma_s}{\gamma} = \left(\frac{2}{3} + \frac{R}{R} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{3} + 1 \right)^{-1} = \left(\frac{5}{3} \right)^{-1} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

■ Prob. 13

O paredão é redesenhado a seguir.



A força F_1 exercida pela porção retangular da massa de água represada pelo paredão é facilmente calculada,

$$F_1 = \gamma h_c A = 64.0 \times \frac{24}{2} \times (24 \times 1) = 18,400 \text{ lb}$$

A carga distribuída associada a F_1 é triangular e concentra-se em uma altura $y_1 = 24/3 = 8.0$ ft. Em seguida, precisamos determinar o volume da massa de água BCD . Com referência ao desenho da direita, temos que x_0 é dado por

$$y = 0.2x^2 \rightarrow 24 = 0.2x_0^2$$

$$\therefore x_0 = \sqrt{\frac{24}{0.2}} = \sqrt{120} \text{ ft} \approx 10.95 \text{ ft}$$

A área da referida massa de água pode ser obtida por integração,

$$A = \int_0^{x_0} (24 - y) dx = \int_0^{x_0} (24 - 0.2x^2) dx$$

$$\therefore A = \left(24x - \frac{0.2x^3}{3} \right) \Big|_0^{10.95}$$

$$\therefore A = 24 \times 10.95 - \frac{0.2 \times 10.95^3}{3} = 175 \text{ ft}^2$$

Segue que o volume V de uma massa BCD com 1 ft de espessura é $V = 175 \times 1 = 175 \text{ ft}^3$, e o peso correspondente é $W = \gamma_w V = 64.0 \times 175 = 11,200 \text{ lb}$. Buscamos também o centroide x_c da área abarcada por BCD . Este é dado por

$$x_c A = \int_0^{x_o} x dA$$

$$\therefore x_c A = \int_0^{x_o} (24 - y) x dx$$

$$\therefore x_c A = \int_0^{x_o} (24x - 0.2x^3) dx$$

$$\therefore x_c A = \left(12x^2 - 0.05x^4 \right) \Big|_{x=0}^{10.95}$$

$$\therefore x_c = \frac{\left(12x^2 - 0.05x^4 \right) \Big|_{x=0}^{10.95}}{175}$$

$$\therefore x_c = \frac{\left(12 \times 10.95^2 - 0.05 \times 10.95^4 \right)}{175} = 4.11 \text{ ft}$$

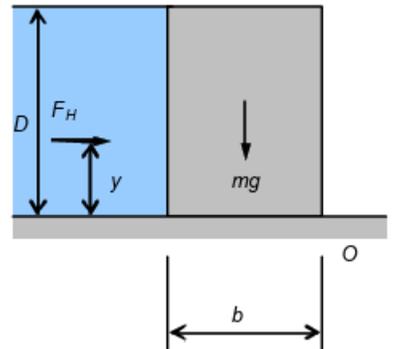
Resta apenas calcular o momento M_A ,

$$M_A = F_1 y_1 - W(15 - x_c) = 18.4 \times 8 - 11.2 \times (15 - 4.11) = \boxed{25.2 \text{ kip-ft}}$$

■ Prob. 14

Análise 1: Barragem Retangular. Para cada caso, a espessura b da barragem deve ser grande o bastante para que o peso da barragem gere um momento capaz de contrabalançar o momento da força hidrostática exercida pela água. Sendo w a largura da barragem (isto é, a dimensão da barragem na direção perpendicular ao papel), temos, para a geometria retangular,

$$F_H = p_c A = \rho_w g \times \frac{D}{2} \times wD = \frac{1}{2} \rho_w g w D^2$$



A linha de ação da força é localizada a uma distância y' da superfície da massa d'água; para determinar y' , escrevemos

$$y' = y_c + \frac{I_{xx}}{Ay_c} = \frac{D}{2} + \frac{(wD^3/12)}{wD \times \frac{D}{2}}$$

$$\therefore y' = \frac{D}{2} + \frac{D}{6} = \frac{2D}{3}$$

Logo, $y = D - y' = D - 2D/3 = D/3$. O peso mg da barragem retangular é dada pelo produto entre o peso específico $\rho_c g$ do concreto e o volume $b \times D \times w$, portanto,

$$mg = \rho_c g b D w = \overline{SG} \rho_w g b D w$$

Somando momentos com relação ao ponto O ,

$$\Sigma M_O = 0 \rightarrow -F_H y + \frac{b}{2} mg = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \rho_w g D^2 w \times \frac{D}{3} + \frac{b}{2} \times (\overline{SG} \rho_w g b D w) = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{6} \rho_w g D^3 w + \frac{1}{2} \overline{SG} \rho_w g b^2 D w = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \overline{SG} \rho_w g b^2 D w = \frac{1}{6} \rho_w g D^3 w$$

$$\therefore \frac{\overline{SG}}{2} b^2 D = \frac{D^3}{6}$$

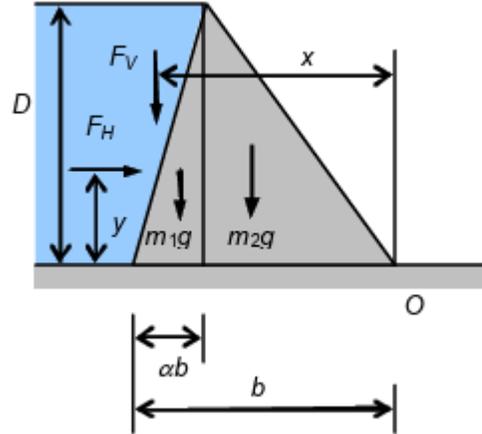
$$\therefore b^2 \times \overline{SG} = \frac{D^2}{3}$$

$$\therefore b = \frac{D}{\sqrt{3 \times \overline{SG}}}$$

Segue que a área de seção requerida é $A = bD$; usando o resultado acima e $\overline{SG} \approx 2.4$ como a gravidade específica do concreto, temos

$$A = bD = \frac{D}{\sqrt{3 \times \overline{SG}}} \times D = \frac{D}{\sqrt{3 \times 2.4}} \times D = 0.373 D^2$$

Análise 2: Barragem Triangular. Ao invés de analisar as três variedades de barragem triangular propostas no enunciado do problema, utilizamos um triângulo generalizado como ilustrado à direita e consideramos os arranjos com triângulos retângulo como casos especiais com $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. A força horizontal exercida pela massa d'água represada continua sendo $F_H = (1/2)\rho_w g w D^2$ e a linha de ação é localizada em $y = D/3$ acima do assoalho do corpo d'água represado. Temos agora uma força vertical F_V dada por



$$F_V = \rho_w g \nabla = \rho_w g \times \frac{\alpha b D w}{2} = \frac{1}{2} \rho_w g \alpha b D w$$

Essa força concentra-se a uma distância x do ponto O tal que

$$x = (b - \alpha b) + \frac{2}{3} \alpha b = b \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right)$$

Em seguida, contabilizamos as forças peso dos dois segmentos triangulares (vide ilustração acima) e suas respectivas linhas de ação,

$$W_1 = m_1 g = \frac{1}{2} \overline{SG} \rho_w g \alpha b D w \quad ; \quad x_1 = (b - \alpha b) + \frac{1}{3} \alpha b = b \left(1 - \frac{2\alpha}{3} \right)$$

$$W_2 = m_2 g = \frac{1}{2} \overline{SG} \rho_w g (1 - \alpha) b D w \quad ; \quad x_2 = \frac{2}{3} b (1 - \alpha)$$

Somando momentos com relação ao ponto O , vem

$$\Sigma M_O = 0$$

$$\therefore -F_H y + F_V x + W_1 x_1 + W_2 x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore -\frac{1}{2} \rho_w g w D^2 \times \frac{D}{3} + \frac{1}{2} \rho_w g \alpha b D w \times b \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right) \\ + \frac{1}{2} \overline{SG} \rho_w g \alpha b D w \times b \left(1 - \frac{2\alpha}{3} \right) + \frac{1}{2} \overline{SG} \rho_w g (1 - \alpha) b D w \times \frac{2}{3} b (1 - \alpha) = 0 \end{aligned}$$

Podemos isolar b e resolver essa extensa equação através do comando *Solve* do Mathematica,

$$\text{In[3]:= momFH} = \frac{-1}{2} * \rho_w * g * w * d^2 * \frac{d}{3};$$

$$\text{In[4]:= momFV} = \frac{1}{2} * \rho_w * g * \alpha * b * d * w * b \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right);$$

$$\text{In[5]:= momW1} = \frac{1}{2} * \overline{SG} * \rho_w * g * \alpha * b * d * w * b * \left(1 - \frac{2\alpha}{3}\right);$$

$$\text{In[6]:= momW2} = \frac{1}{2} * \overline{SG} * \rho_w * g * (1 - \alpha) * b * d * w * \frac{2b}{3} * (1 - \alpha);$$

$$\text{In[7]:= Solve[-momFH + momFV + momW1 + momW2 == 0, b]}$$

$$\text{Out[7]=} \left\{ \left\{ b \rightarrow -\frac{d}{\sqrt{-3\alpha + \alpha^2 - 2\overline{SG} + \alpha\overline{SG}}} \right\}, \left\{ b \rightarrow \frac{d}{\sqrt{-3\alpha + \alpha^2 - 2\overline{SG} + \alpha\overline{SG}}} \right\} \right\}$$

Note que a solução negativa não tem significado físico. Lembrando que o Mathematica possui um péssimo modo de tratar sinais negativos no interior de raízes, a solução aceitável é

$$b = \frac{D}{\sqrt{3\alpha - \alpha^2 + \overline{SG}(2 - \alpha)}} \quad \text{(I)}$$

Com a hipotenusa disposta em contato com a água, temos $\alpha = 1$ e **(I)** torna-se

$$b = \frac{D}{\sqrt{3 \times 1 - 1^2 + 2.4 \times (2 - 1)}} = 0.477D$$

A área de seção é

$$A = \frac{bD}{2} = \frac{0.477D \times D}{2} = 0.239D^2$$

Para um triângulo retângulo com cateto vertical em contato com a água, temos $\alpha = 0$ e **(I)** torna-se

$$b = \frac{D}{\sqrt{3 \times 0 - 0^2 + 2.4 \times (2 - 0)}} = 0.456D$$

A área de seção é

$$A = \frac{bD}{2} = \frac{0.456D \times D}{2} = 0.228D^2$$

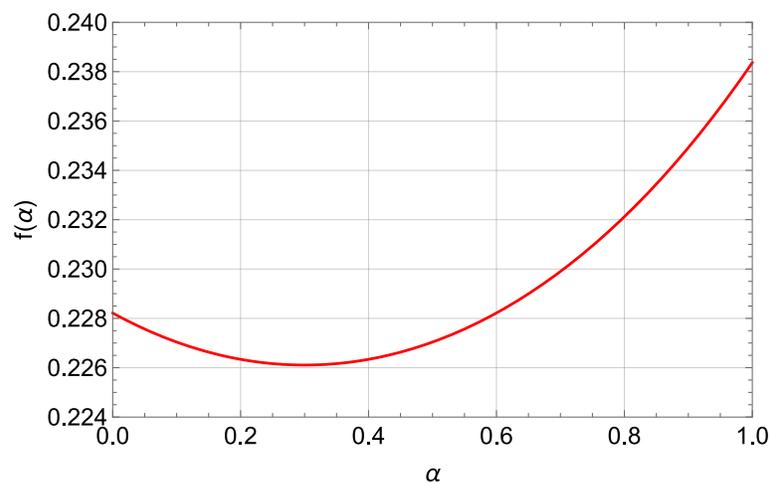
Para um triângulo geral, a área de seção é dada por

$$A = \frac{bD}{2} = \frac{D}{\sqrt{3\alpha - \alpha^2 + 2.4 \times (2 - \alpha)}} \times \frac{D}{2} = f(\alpha)D^2$$

onde

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{4.8 + 0.6\alpha - \alpha^2}}$$

A função $f(\alpha)$ determina a área de seção da barragem e, por conseguinte, a quantidade de concreto necessária para construí-la. Podemos plotar $f(\alpha)$ usando o comando *Plot* do Mathematica; a curva obtida é mostrada a seguir.

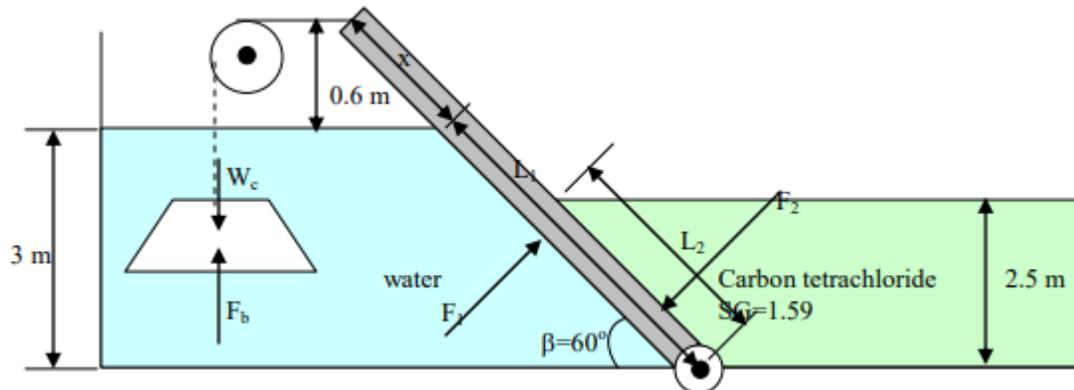


Claramente, existe um $\alpha \in [0,1]$ para o qual $f(\alpha)$ é mínimo; podemos obtê-lo com a ferramenta *Get Coordinates*, com a qual vê-se que o menor $f(\alpha)$ é 0.226 e corresponde a $\alpha = 0.3$. Os resultados obtidos com as geometrias analisadas até o momento estão sumarizadas a seguir. Concluímos que um triângulo escaleno com $\alpha = 0.3$ é a geometria que exige o menor consumo de concreto. A segunda melhor solução é um triângulo retângulo com cateto vertical em contato com a água.

Geometria	α	Área Seção
Retangular	-	$0.373D^2$
TR (hipotenusa em contato com a água)	1	$0.239D^2$
TR (cateto vertical em contato com a água)	0	$0.228D^2$
Triângulo escaleno	0.3	$0.226D^2$

■ Prob. 15

O sistema em foco está ilustrado a seguir.



A força aplicada no portão pela massa de água do lado esquerdo é

$$F_1 = \gamma h_{CG1} A_1 = 9810 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \right) \times \left(1 \times \frac{3}{\sin 60^\circ} \right) = 50,970 \text{ N}$$

A linha de ação da força está a uma profundidade y_{CP1} dada por

$$y_{CP1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sin 60^\circ} + \frac{1 \times [3/\sin(60^\circ)]^3 / 12}{3/[2 \sin(60^\circ)] \times [1 \times (3/\sin(60^\circ))]} = 2.31 \text{ m}$$

Proseguindo de modo semelhante para determinar a força F_2 exercida pela massa de CCl_4 do lado direito, temos

$$F_2 = \gamma h_{CG2} A_2 = (1.59 \times 9810) \times \left(\frac{1}{2} \times 2.5 \right) \times \left(1 \times \frac{2.5}{\sin 60^\circ} \right) = 56,300 \text{ N}$$

$$y_{CP2} = \frac{1}{2} \times \frac{2.5}{\sin 60^\circ} + \frac{1 \times [2.5/\sin(60^\circ)]^3 / 12}{2.5/[2 \sin(60^\circ)] \times [1 \times (2.5/\sin(60^\circ))]} = 1.92 \text{ m}$$

Temos ainda o pequeno segmento x do portão que não está imerso em nenhum dos dois fluidos e é dado por $x = 0.6/\sin(60^\circ) = 0.693 \text{ m}$. Note ainda que $L_1 = 3/\sin(60^\circ) = 3.46 \text{ m}$ e $L_2 = 2.5/\sin(60^\circ) = 2.89 \text{ m}$. Somando momentos relativamente à articulação no fundo do sistema, vem

$$\forall_c (\gamma_c - \gamma_w) \sin(\beta) \times (x + L_1) + F_2 \times (L_2 - y_{CP2}) - F_1 \times (L_1 - y_{CP1}) = 0$$

$$\therefore \forall_c = \frac{F_1 \times (L_1 - y_{CP1}) - F_2 \times (L_2 - y_{CP2})}{(\gamma_c - \gamma_w) \sin(\beta) \times (x + L_1)}$$

$$\therefore \nabla_c = \frac{50,970 \times (3.46 - 2.31) - 56,300 \times (2.89 - 1.92)}{(2.4 \times 9810 - 9810) \times \sin(60^\circ) \times (0.693 + 3.46)} = \boxed{0.0811 \text{ m}^3}$$

■ Prob. 16

As duas componentes horizontais têm mesma magnitude e são iguais à força nos painéis laterais com formato de quarto de círculo, cujos centroides localizam-se $4R/(3\pi)$ acima do plano xy ,

$$F_x = F_y = \gamma h_{CG} A_{\text{vert}} = \gamma \times \left(h - \frac{4R}{3\pi} \right) \times \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\therefore F_x = F_y = \frac{\pi \gamma R^2}{4} \left(h - \frac{4R}{3\pi} \right)$$

De modo semelhante, a resultante vertical F_z é o peso do fluido acima da superfície esférica,

$$F_z = W_{\text{cilindro}} - W_{\text{esfera}} = \gamma \left(\frac{\pi R^2 h}{4} \right) - \gamma \left(\frac{1}{8} \times \frac{4\pi R^3}{3} \right)$$

$$\therefore F_z = \gamma \left(\frac{\pi R^2 h}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{4\pi R^3}{3} \right)$$

$$\therefore F_z = \gamma \left(\frac{\pi R^2 h}{4} - \frac{4\pi R^3}{6} \right)$$

$$\therefore F_z = \pi \gamma R^2 \left(\frac{h}{4} - \frac{4R}{6} \right)$$

$$\therefore F_z = \pi \gamma R^2 \left(\frac{6h}{24} - \frac{16R}{24} \right)$$

$$\therefore F_z = \frac{\pi \gamma R^2}{4} \left(h - \frac{2R}{3} \right)$$

Não há necessidade de localizar os (potencialmente complicados) centros de pressão dessas três componentes, pois sabemos que a resultante hidrostática em uma superfície esférica deve necessariamente passar pelo centro. Portanto, resta apenas calcular a intensidade da resultante F_R ,

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{2\left(\frac{\pi\gamma R^2}{4}\right)^2 \left(h - \frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{\pi\gamma R^2}{4}\right)^2 \left(h - \frac{2R}{3}\right)^2}$$

$$\therefore F_R = \frac{\pi\gamma R^2}{4} \sqrt{2\left(h - \frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \left(h - \frac{2R}{3}\right)^2}$$

■ Referências (★ → Livro altamente recomendado)

1. ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications**. 3. ed. McGraw-Hill, 2014.
2. HIBBELER, R.C. **Fluid Mechanics**. 2. ed. Pearson, 2021.
3. MUNSON, B.R.; YOUNG, D.F.; OKIISHI, T.H.; HUEBSCH, W.W. **Fundamentals of Fluid Mechanics**. 6. Ed. John Wiley and Sons, 2009.
4. PRITCHARD, P.J. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. 8. ed. John Wiley and Sons, 2011. ★
5. WHITE, F.M. **Fluid Mechanics**. 8. ed. McGraw-Hill, 2011. ★

➔ Referências de cada problema

Problema	Ref.	Problema	Ref.
1	[2]	9	[4]
2	[2]	10	[4]
3	[2]	11	[5]
4	[1]	12	[5]
5	[3]	13	[3]
6	[5]	14	[4]
7	[3]	15	[1]
8	[4]	16	[5]

■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

WhatsApp: (61) 981247059

Email: lucas_0150@hotmail.com

