



Lista de Exercícios Resolvidos 10

Geofísica

Parte 1: Gravidade e Sismologia

Lucas Monteiro Nogueira

■ Problemas

Parte 1: Gravidade e Sismologia

1. Momento de Inércia da Terra
2. Gravidade I: Anomalia Gravitacional Esférica
3. Gravidade II: Anomalia Gravitacional Cilíndrica
4. Gravidade III: Poço Vertical
5. Gravidade IV: Anomalia Detectável I
6. Gravidade V: Anomalia Detectável II
7. Gravidade VI: Método de Nettleton
8. Gravidade VII: Métodos Gravitacionais – Revisão
9. Equilíbrio Isostático I
10. Equilíbrio Isostático II
11. Equilíbrio Isostático III
12. *Checklist Rápido 1*
13. Sismologia I: Interpretando um Sismograma
14. Sismologia II: Estimando o Horário de um Terremoto
15. Sismologia III: Parâmetros Constitutivos
16. Sismologia IV: Velocidades de Onda
17. Sismologia V: Plotando Tempos de Chegada
18. Raios Sísmicos I
19. Raios Sísmicos II
20. Raios Sísmicos III
21. Raios Sísmicos IV
22. Raios Sísmicos V
23. Raios Sísmicos VI



- 24. Magnitude Sísmica I
 - 25. Magnitude Sísmica II
 - 26. Magnitude Sísmica III
 - 27. Magnitude Sísmica IV: Réplicas I
 - 28. Magnitude Sísmica V: Réplicas II
-

Parte 2: Calor e Eletromagnetismo

- 29. Análise de Calor: Derretimento de uma Lagoa
- 30. Calor na Litosfera I: Fluxo de Calor na Litosfera Oceânica
- 31. Calor na Litosfera II: Calor Gerado e Manto
- 32. Calor na Litosfera III: Ondas Térmicas
- 33. Escoamento de Magma I
- 34. Escoamento de Magma II
- 35. *Checklist Rápido 2*
- 36. Campos Magnéticos I
- 37. Campos Magnéticos II
- 38. Campos Magnéticos III
- 39. Campos Magnéticos IV
- 40. Campos Magnéticos V
- 41. Geomagnetismo I
- 42. Geomagnetismo II
- 43. Geomagnetismo III
- 44. Geomagnetismo IV
- 45. Geomagnetismo V
- 46. Massa da Atmosfera Terrestre
- 47. Ionosfera I
- 48. Ionosfera II
- 49. Ionosfera III
- 50. Ionosfera IV
- 51. Ionosfera V
- 52. Ionosfera VI

■ Problema 1 (Momento de Inércia da Terra)

Podemos representar a Terra como uma esfera composta por um núcleo denso de raio 3500 km contendo 31% da massa terrestre e um manto de densidade mediana com raio 2900 km contendo 69% da massa terrestre. Com essa representação, qual é o momento de inércia da Terra?

■ Problema 2 (Gravidade I: Anomalia Gravital Esférica)

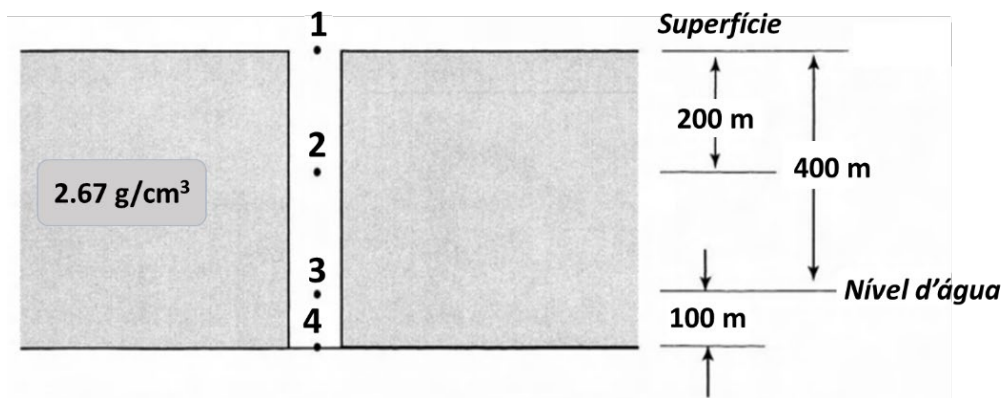
- (a) Calcule a anomalia gravital máxima produzida por uma esfera de raio igual a 1 km e contraste de densidades 300 kg/m^3 . A esfera está a uma profundidade de 2 km.
- (b) Qual é a anomalia gravital produzida em um ponto na superfície localizado a 5 km do centro da esfera do item (a)?

■ Problema 3 (Gravidade II: Anomalia Gravital Cilíndrica)

- (a) Uma anomalia gravital é produzida por um cilindro de raio 1 km com contraste de densidades igual a 200 kg/m^3 . O cilindro está localizado a 1 km da superfície. Qual é a anomalia gravital máxima produzida pelo cilindro na superfície?
- (b) Um cilindro de raio igual a 50 km enterrado a 100 km de profundidade produz a mesma anomalia gravital máxima obtida no item anterior. Sendo assim, qual é o contraste de densidades deste cilindro?

■ Problema 4 (Gravidade III: Poço Vertical)

Estamos mensurando valores de gravidade em um poço vertical, como ilustrado a seguir. Encontre as correções ar-livre e Bouguer referentes aos valores de g nas posições 1, 2, 3 e 4. O nível d'água indicado é utilizado como *datum*.



■ Problema 5 (Gravidade IV: Anomalia Detectável I)

Considere a região de um depósito mineral em cristas anticlinais. O depósito pode ser modelado como um cilindro horizontal com raio R e profundidade de 100 m em relação à superfície. Sabe-se que a formação mineral tem densidade 3.0 g/cm^3 e o maciço circundante tem densidade 2.3 g/cm^3 . Durante uma sondagem gravital realizada na área, utilizou-se um instrumento com precisão de 0.1 mGal . Qual deve ser o valor mínimo de R para que o depósito seja identificado pelo instrumento?

■ Problema 6 (Gravidade V: Anomalia Detectável II)

Testes de bombeamento em um poço artesiano de grande porte indicaram a presença de uma zona subterrânea de depressão cuja superfície superior se estende a uma longa distância do poço. A camada superficial da região em foco é composta de areia com porosidade 40% e densidade 2.60 g/cm^3 . O rendimento específico do bombeamento é de 30% (ou seja, 30% do fluido que ocupa os 40% de vazios). Verifique se a zona de depressão poderá ser detectada por um instrumento com 1 mGal de resolução. Para fins de modelagem, suponha que a zona de depressão pode ser representada por um cilindro horizontal com raio 300 m e centro à profundidade de 300 m.

■ Problema 7 (Gravidade VI: Método de Nettleton)

Os seguintes valores de medidas gravitacionais foram obtidos em uma formação rochosa. Use a correção de elevação para estimar a densidade aparente da rocha.

Elevação (m)	Gravidade (mGal)
100	-39.2
150	-49.5
235	-65.6
300	-78.1
385	-95.0
430	-104.2

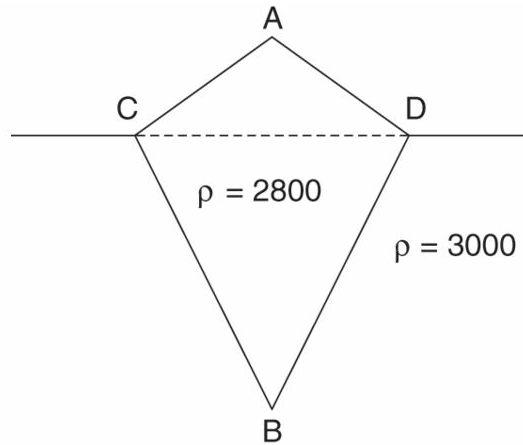
■ Problema 8 (Gravidade VII: Métodos Gravitacionais – Revisão)

Nos anos 1850, o célebre matemático e astrônomo britânico G.B. Airy propôs um experimento para estabelecer o valor da constante gravitacional newtoniana G . No modelo de Airy, a constante G é estabelecida através da variação da gravidade g como função da profundidade em uma mina; utiliza-se também a densidade crustal ρ . Airy publicou seus resultados sob a forma de uma medida da densidade média da Terra, $\bar{\rho}$.

- (a) Por que a determinação da densidade média $\bar{\rho}$ pode ser considerada equivalente à determinação da constante G ?
- (b) Qual é o valor da razão $\rho/\bar{\rho}$ que resultaria em um gradiente de gravidade igual a zero na mina?
- (c) A densidade crustal é tipicamente suposta igual à metade da densidade média da Terra. Sendo assim, qual é o gradiente crustal da gravidade terrestre?
- (d) Qual é o gradiente gravitacional no oceano?

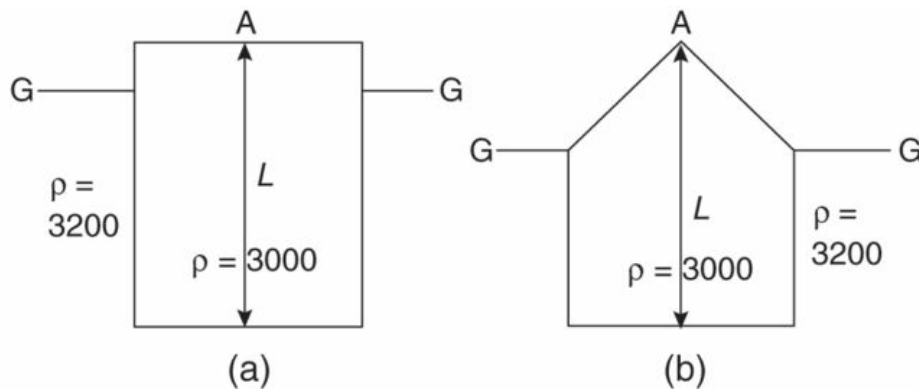
■ Problema 9 (Equilíbrio Isostático I)

O pico A de uma montanha está 1000 m acima do nível CD de uma planície local, como ilustrado a seguir. A densidade das rochas que formam a montanha é 2800 kg/m^3 e a densidade da crosta circundante é 3000 kg/m^3 . Supondo que a montanha é simétrica em relação ao ponto A e que o sistema encontra-se em equilíbrio isostático local, calcule a profundidade de B abaixo do nível CD.



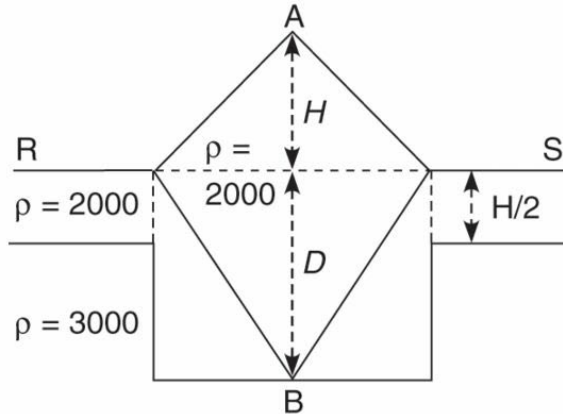
■ Problema 10 (Equilíbrio Isostático II)

Um bloco crustal com densidade média 3000 kg/m^3 está em equilíbrio isostático com as rochas circundantes, as quais têm densidade média de 3200 kg/m^3 , como ilustra a figura (a) a seguir. Após sucessivos processos erosivos, a topografia passa a ser conforme mostra a figura (b), onde a distância L segue constante (não há erosão no ponto A) e um equilíbrio isostático do tipo Airy é mantido. Expresse, em função de L , a variação na altura de A.



■ **Problema 11 (Equilíbrio Isostático III)**

Um sistema idealizado montanha-e-raiz é ilustrado a seguir. As densidades em kg/m^3 estão indicadas na ilustração. Exprima a altura H do ponto A acima da superfície horizontal RS em termos da profundidade D da raiz B abaixo dessa superfície.



■ **Checklist Rápido 1**

■ **12.1. (GATE 2009)** Relacione as ondas sísmicas da coluna esquerda com as propriedades da coluna direita.

Ondas	Propriedades
W. Onda P	1. Onda que se propaga na superfície do meio
X. Onda S	2. Deslocamento das partículas de rocha é perpendicular à direção de propagação
Y. Onda Rayleigh	3. Deslocamento das partículas de rocha descreve uma elipse retrógrada
Z. Onda Love	4. Deslocamento das partículas de rocha é paralelo à direção de propagação

- A) W.3, X.4, Y.1, Z.2
- B) W.1, X.4, Y.2, Z.3
- C) W.1, X.3, Y.2, Z.4
- D) W.4, X.2, Y.3, Z.1

■ **12.2.()** A velocidade de uma onda de compressão em um meio rochoso homogêneo com densidade 2.60 g/cm^3 , módulo de Young 39 GPa e coeficiente de Poisson 0.11 é maior que 4000 m/s .

(GATE 2010) Em um modelo terrestre de duas camadas, o meio superior possui velocidade sísmica e densidade respectivamente iguais a $V_{p1} = 4000$ m/s e $\rho_1 = 2500$ kg/m³; o meio inferior, por sua vez, é tal que $V_{p2} = 4500$ m/s e $\rho_2 = 2600$ kg/m³.

■ **12.3.** Qual é a impedância acústica da primeira camada para incidência normal? Suponha que as alternativas a seguir estão em unidades SI.

A) 10^3

B) 10^4

C) 10^5

D) 10^7

■ **12.4.** Qual é o coeficiente de transmissão de uma onda que incide perpendicularmente na fronteira entre o primeiro e o segundo meio?

A) 0.46

B) 0.58

C) 0.92

D) 1.07

■ **12.5.()** Em modelos geodéticos como o *World Geodetic System 84 (WGS-84)*, a Terra é representada como um elipsoide de revolução achatado. O elipsoide de revolução terrestre apresenta um eixo equatorial ligeiramente maior que o eixo polar.

■ **12.6.()** Um atleta olímpico de salto com vara consegue atingir uma altura de 3.6 m na superfície de uma região do equador terrestre. Sabendo que a gravidade lunar média é de 1.62 m/s², podemos inferir que o mesmo atleta, ao realizar um salto na lua, conseguirá atingir uma altura superior a 25 m.

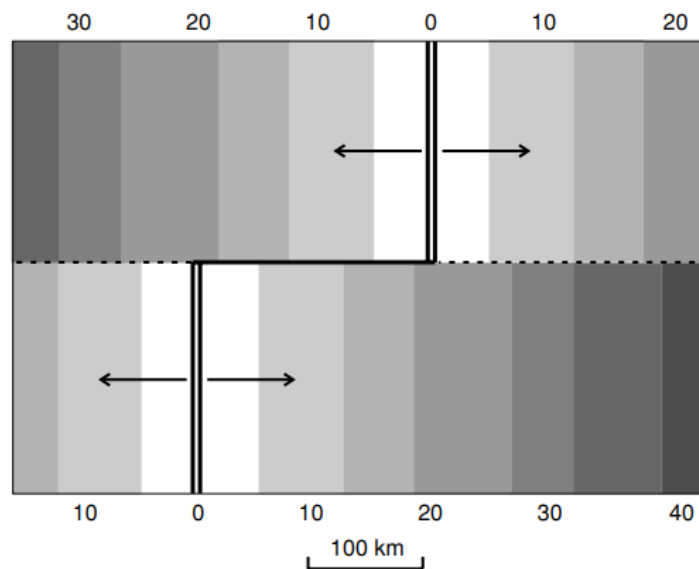
■ **12.7.()** Sistemas geodéticos podem mensurar, entre outras, *altitudes ortométricas* e *altitudes normais*. No sistema geodético brasileiro, as duas altitudes são relacionadas pela expressão $H = h - N$, onde H é a altitude geométrica, h é a altitude ortométrica e N é a ondulação do geóide.

■ **12.8.()** O *Global Geodynamics Project (GGP)* foi um projeto internacional estabelecido pela iniciativa *SEDI (Study of the Earth's Deep Interior)* da União Internacional de Geodésia e Geofísica (IUGG) em 1991. Em 2003, o GGP deu lugar ao Projeto Intercomissão da Associação Internacional de Geodésia (IAG) e agora responde às Comissões 2 (Campo Gravitacional) e 3 (Rotação da Terra e Geodinâmica) da referida instituição. Os diferentes colaboradores da IAG mantêm uma complexa rede internacional de cerca de 30 estações equipadas com gravímetros por supercondução, cada um dos quais fornece medidas do campo gravitacional vertical local para uma base de dados atualizada regularmente. Apesar de sua formidável precisão, uma importante limitação da rede de monitoramento da IAG reside no fato de que a maior parte das estações envolvidas no projeto está concentrada no hemisfério sul, o que sugere uma urgente necessidade de expandir a participação da porção norte do planeta na comunidade internacional de estudos geodéticos.

■ **12.9.** Suponha que a espessura hipotética da crosta continental é 50 km. A profundidade da bacia oceânica é suposta igual a 5 km. As densidades de água marinha, crosta e manto são respectivamente iguais a 1030 kg/m^3 , 2900 kg/m^3 e 3300 kg/m^3 . Sabendo que equilíbrio isostático e compensação do tipo Airy são válidos, calcule a espessura da crosta oceânica.

- A) 17.7 km
- B) 21.6 km
- C) 26.1 km
- D) 62.9 km

■ **12.10.** A figura a seguir é uma representação idealizada de uma falha transformante que separa dois segmentos de dorsal. Os números são idades em Ma. As províncias de mesma idade estão coloridas de modo progressivo. Note que o único deslocamento ao longo da falha se dá nos *offsets* que separam as dorsais; ademais, sabe-se que o deslocamento é sinistral (para a esquerda). Usando o modelo de espessura oceânica $z(t) = 11t^{1/2}$, com z em quilômetros e t em Ma, estime a espessura litosférica dos dois segmentos.



- A) 31 km
- B) 43 km
- C) 49 km
- D) 56 km

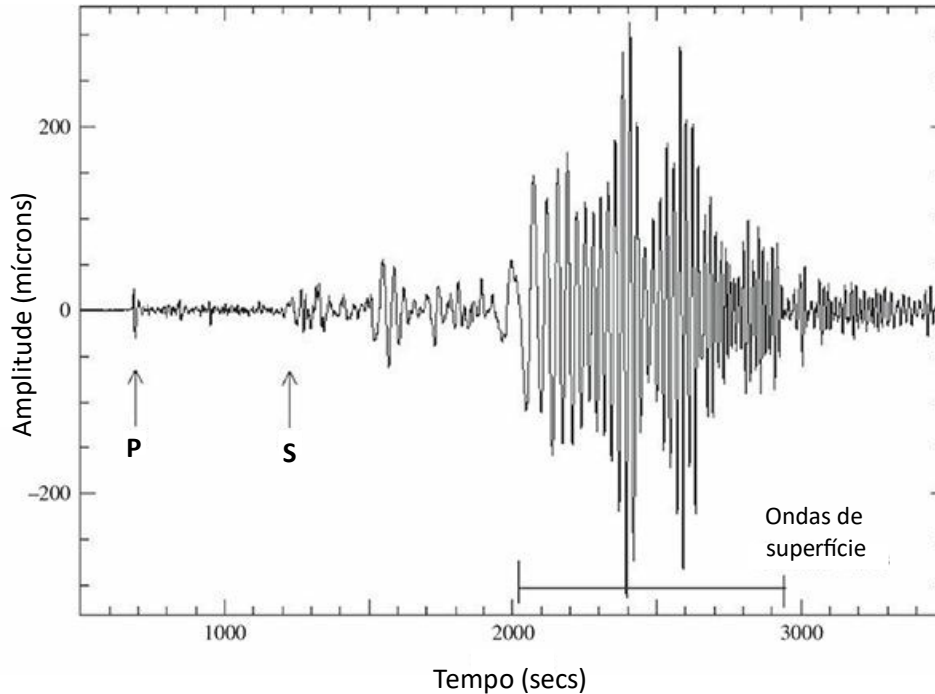
■ Problema 13 (Sismologia I: Interpretando um Sismograma)

A figura a seguir é um sismograma do terremoto de Loma Prieta, um sismo de magnitude 6.9 que atingiu a Califórnia em 1989. O sismograma foi registrado na Finlândia.

(a) Estime o período dominante T da onda superficial ao longo dos 10 ciclos iniciais.

Calcule também a frequência $f = 1/T$.

(b) Forneça uma estimativa da deformação *máxima* atinente às ondas superficiais registradas no local. Suponha que a velocidade de fase da onda Rayleigh no período dominante é 3.9 km/s.



■ Problema 14 (Sismologia II: Estimando o Horário de um Terremoto)

A onda P de um terremoto é detectada por uma estação sismológica às 11:45 da manhã; a onda S, por sua vez, é detectada às 11:50. Sabendo que a velocidade da onda P é 5 km/s e que a razão de Poisson é 0.25, encontre o horário no qual o terremoto ocorreu e a distância epicentral, em graus, a partir da estação sismográfica.

■ Problema 15 (Sismologia III: Parâmetros Constitutivos)

Uma amostra de granito estudada em laboratório possui velocidade P igual a 5.5 km/s e densidade 2.6 Mg/m³. Supondo que a amostra de granito pode ser modelada como um sólido de Poisson, determine os parâmetros de Lamé, o módulo de Young e o módulo de compressibilidade.

■ Problema 16 (Sismologia IV: Velocidades de Onda)

As velocidades de onda α e β são respectivamente dadas por

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad ; \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

- (a) Utilize essas expressões para exprimir os parâmetros de Lamé em função das velocidades sísmicas e da densidade ρ .
- (b) Observações sismográficas de ondas S podem ser diretamente associadas ao módulo de cisalhamento μ . Não há uma relação simples como essa para ondas P, uma vez que estas são funções simultâneas do módulo de cisalhamento e do módulo de compressibilidade. Cientes dessa limitação, sismólogos ocasionalmente utilizam a *velocidade do som em massa*,

$$V_c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

que permite isolar a influência do módulo de compressibilidade κ . Derive uma equação para V_c em função das velocidades de onda P (α) e S (β).

- (c) Para o caso específico de um sólido de Poisson, exprima V_c como uma fração da velocidade de ondas P.

■ Problema 17 (Sismologia V: Plotando Tempos de Chegada)

A tabela mostrada na página a seguir fornece os tempos de chegada de ondas P (t_p) e S (t_s) registradas em um terremoto.

- (a) Prepare um gráfico de diferenças de tempo de chegada, $(t_s - t_p)$, versus tempos de chegada das ondas P (t_p).
- (b) Determine a razão de velocidades sísmicas α/β .
- (c) Determine o tempo de ocorrência do terremoto.

■ Problema 18 (Raios Sísmicos I)

Suponha que a crosta terrestre consiste de uma camada horizontal de espessura H e velocidade sísmica v_1 . A velocidade v_2 no manto subjacente à crosta é 25% maior que v_1 . Sabendo que um foco na superfície produz uma onda refletida que percorre uma distância horizontal de 90 km após 16 segundos, e sabendo que essa é a distância crítica, calcule os valores de v_1 , v_2 e H . Forneça também um gráfico (t,x) de distância versus tempo de trajetória para a presente situação.

■ Problema 19 (Raios Sísmicos II)

Suponha que a Terra consiste de uma camada de 26 km de espessura e velocidade sísmica 5 km/s sobrejacente a um meio no qual a velocidade sísmica é 7.2 km/s. Um foco sísmico está localizado a 15 km de profundidade. Calcule a diferença (valor absoluto) entre os tempos de trajetória dos raios refletidos (t_2) e criticamente refratados (t_3) observados a 180 km do epicentro do referido foco sísmico.

(Tabela para uso no Problema 17.)

Estação	Horário das medidas	t_p (sec)	t_s (sec)
Alfa	21:36	54.65	57.90
Beta	21:36	57.34	62.15
Gamma	21:37	00.49	07.55
Delta	21:37	01.80	10.00
Epsilon	21:37	01.90	10.10
Zeta	21:37	02.25	10.70
Eta	21:37	03.10	12.00
Teta	21:37	03.50	12.80
Iota	21:37	06.08	18.30
Kappa	21:37	07.07	19.79
Lambda	21:37	08.32	21.40
Mu	21:37	11.12	26.40
Nu	21:37	11.50	26.20
Xi	21:37	17.80	37.70

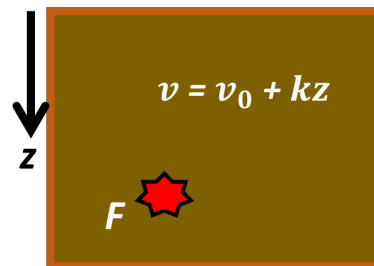
■ **Problema 20 (Raios Sísmicos III)**

Considere uma crosta constituída de duas camadas de espessuras 15 e 25 km e velocidades de onda P respectivamente iguais a 8 e 6.5 km/s. As camadas estão sobrejacentes a um manto no qual a velocidade sísmica de propagação é 9.2 km/s. Há um foco sísmico à profundidade de 10 km da superfície livre. Para uma estação situada a 120 km de distância epicentral do foco, calcule os tempos de trajetória dos raios direto, refletido e criticamente refratado (desprezando raios com mais de uma reflexão e raios com reflexão crítica).

■ **Problema 21 (Raios Sísmicos IV)**

(a) Em um meio retangular semi-infinito, a velocidade sísmica cresce com a profundidade segundo a expressão linear $v = v_0 + kz$, onde v_0 é a velocidade sísmica na superfície, k é uma constante e z é a profundidade. Para um foco de profundidade $z = h$, derive uma expressão que fornece o ângulo de disparo i_h em função da distância epicentral x e dos parâmetros v_0 , h e k .

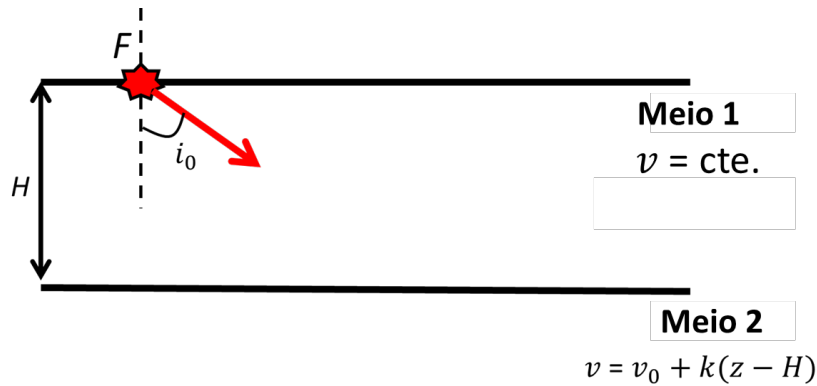
(b) Reconsidere a situação da parte (a). Sabe-se que a velocidade cresce linearmente seguindo a expressão $v = 3.6 + 0.1z$, onde z é dado em km e v em km/sec. O foco está à profundidade de 12 km. Calcule a distância epicentral x sabendo que o raio abandona o foco com ângulo de disparo $i_h = 30^\circ$.



■ **Problema 22 (Raios Sísmicos V)**

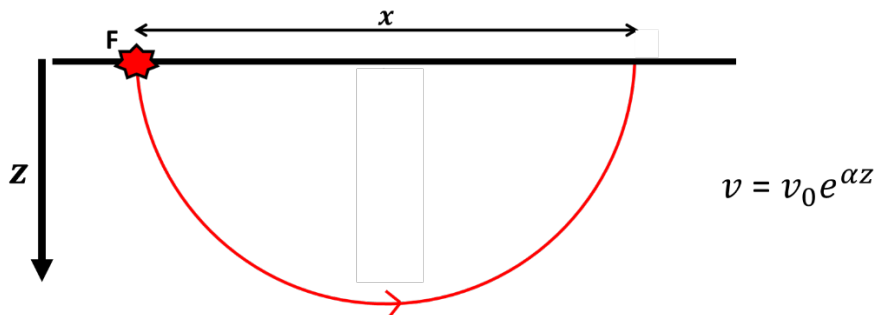
(a) Um meio retangular semi-infinito consiste de uma camada de espessura H e velocidade constante de propagação v sobrejacente a um meio de velocidade de propagação variável dada por $v = v_0 + k(z - H)$, onde z é a profundidade e k é uma constante. Sabendo que há um foco sísmico na superfície, escreva expressões para a distância epicentral x e o tempo de trajetória t como funções do ângulo de incidência i_0 na superfície (vide figura a seguir).

(b) Sendo $H = 10$ km, $k = 0.15 \text{ sec}^{-1}$ e $v_0 = 5$ km/s, calcule o ângulo de incidência de uma onda que cobre uma distância epicentral de 125 km. *Observação:* mais de uma resposta pode ser possível.



■ **Problema 23 (Raios Sísmicos VI)**

Um estrato sólido apresenta distribuição de velocidades sísmicas com a forma $v = v_0 e^{\alpha z}$, onde $\alpha \in (0; 1)$, v_0 é a velocidade na superfície e z é a profundidade. Considerando um foco F na superfície, forneça expressões para o parâmetro de raio, o tempo de trajetória e a profundidade máxima alcançada.



■ Problema 24 (Magnitude Sísmica I)

- (a) Um terremoto ocorre durante uma festa em Los Angeles. Ao fim do tremor, um dos convidados tenta impressionar os demais dizendo: “sinto que a magnitude foi 5.5.” Mesmo que tenha uma excelente capacidade de ‘sentir’ acelerações no chão em que pisa, o convidado carece de uma informação crucial que o impede de estimar a magnitude do terremoto com acurácia. Qual é essa informação?
- (b) Suponha que uma falha de 30 km de profundidade percorre todo o Equador terrestre. A falha provocou um único terremoto ao romper-se com rejeito de 20 m. Forneça uma estimativa da magnitude de momento M_w .

■ Problema 25 (Magnitude Sísmica II)

Em uma região hipotética com notável atividade sísmica, estudou-se a ocorrência de terremotos no decurso de um período de 80 anos. Parte do acervo é instrumental e parte não o é. Combinando todos os dados disponíveis, a seguinte distribuição foi obtida:

Magnitude de momento	No. de terremotos
3 – 4	~1800
4 – 5	~150
5 – 6	11
>6	1

- (a) Estime os parâmetros de Gutenberg-Richter para a região em estudo.
- (b) Desprezando sismos com magnitude inferior a 3, compute a probabilidade de que um terremoto na região terá magnitude de momento entre 5.5 e 6.5.
- (c) Repita a parte (b) levando em conta que levantamentos paleosísmicos da região indicaram que a região não é capaz de produzir terremotos com magnitude maior que 6.5.

■ Problema 26 (Magnitude Sísmica III)

A atividade sísmica de uma região é descrita pela seguinte lei de recorrência de Gutenberg-Richter:

$$\log_{10} \lambda_m = 4.0 - 0.7M$$

onde λ_m é a taxa anual de terremotos com magnitude M .

- (a) Qual é a probabilidade de que *ao menos um* terremoto com magnitude maior que 7.0 ocorrerá em um período de 10 anos? 50 anos? 250 anos?
- (b) Qual é a probabilidade de que *exatamente um* terremoto com magnitude maior que 7.0 ocorrerá em um período de 10 anos? 50 anos? 250 anos?
- (c) Determine a magnitude de terremoto que terá uma probabilidade de 10% de ser excedida ao menos uma vez em um período de 50 anos.

■ Problema 27 (Magnitude Sísmica IV: Réplicas I)

A lei de Omori permite calcular o número de réplicas (*aftershocks*) que sucedem um sismo principal. Podemos escrevê-la como

$$n(t) = \frac{K}{t+c}$$

onde $n(t)$ é o número de réplicas por unidade de tempo, t é o tempo mensurado a partir do choque principal e c, K são constantes. Utilizando a lei de Omori, derive uma equação para o número **total** de réplicas como função do tempo após um choque inicial.

(a) O que essa equação sugere sobre o número de réplicas após um tempo infinito?

(b) Para $c = 1$ dia, seja N_{1000} o número de réplicas previsto após 1000 dias. Qual é o tempo necessário para que metade dos N_{1000} choques ocorram?

(c) Repita os cálculos da parte (b) para $c = 10$ minutos.

■ Problema 28 (Magnitude Sísmica V: Réplicas II)

Uma “regra” ocasionalmente utilizada em sismologia diz que a mais intensa réplica observada após um terremoto possuirá magnitude um ponto menor que o choque principal. Supondo que isso é verdadeiro, forneça uma estimativa do número de réplicas com magnitude $M \geq 1.5$ observadas após um choque principal de magnitude 6.5. Utilize $b = 1.0$ na lei de Gutenberg-Richter.

■ Soluções

■ Prob. 1

O momento de inércia de massa atinente a uma esfera de densidade constante é dado por $I_{\text{avg}} = 2MR^2/5$, onde a massa M é obviamente dada por

$$M = \text{Densidade} \times \text{Volume} = \rho_{\text{ave}} \times \frac{4\pi R^3}{3}$$

de modo que

$$I_{\text{avg}} = \frac{2MR^2}{5} = \frac{2}{5} \times \left(\rho_{\text{avg}} \times \frac{4\pi R^3}{3} \right) \times R^2$$

$$\therefore I_{\text{avg}} = \frac{8\pi}{15} \rho_{\text{avg}} R_{\text{Terra}}^5$$

O núcleo se estende até uma distância relativa $x = R_{\text{núcleo}}/R_{\text{Terra}} = 3500/6400 = 0.547$. Segue que o momento de inércia referente ao núcleo é

$$I_{\text{núcleo}} = \frac{8\pi}{15} \rho_{\text{núcleo}} (xR_{\text{Terra}})^5$$

ao passo que o momento de inércia atinente ao manto é

$$I_{\text{manto}} = \frac{8\pi}{15} \rho_{\text{manto}} R_{\text{Terra}}^5 (1 - x^5)$$

O momento de inércia total é dado pela soma das duas contribuições, $I_{\text{Terra}} = I_{\text{núcleo}} + I_{\text{manto}}$. A massa do núcleo é $M_{\text{núcleo}} = 0.31M_{\text{Terra}} = 4\pi\rho_{\text{núcleo}}(xR_{\text{Terra}})^3/3$, portanto a densidade nuclear é dada por

$$\rho_{\text{núcleo}} = \frac{0.31}{x^3} \frac{3M_{\text{Terra}}}{\underbrace{4\pi R_{\text{Terra}}^3}_{=\rho_{\text{avg}}}} = \frac{0.31}{x^3} \rho_{\text{avg}}$$

De modo semelhante, a massa do manto é $M_{\text{manto}} = 0.69M_{\text{Terra}} = 4\pi\rho_{\text{manto}}(R_{\text{Terra}})^3(1 - x^3)/3$, portanto a densidade do manto é tal que

$$\rho_{\text{núcleo}} = \frac{0.69}{1 - x^3} \frac{3M_{\text{Terra}}}{\underbrace{4\pi R_{\text{Terra}}^3}_{=\rho_{\text{avg}}}} = \frac{0.69}{1 - x^3} \rho_{\text{avg}}$$

Em seguida, escrevemos o momento de inércia do núcleo,

$$I_{\text{núcleo}} = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{0.31}{x^3} \right) \rho_{\text{avg}} x^5 R_{\text{Terra}}^5 = 0.31x^2 I_{\text{avg}}$$

e o momento de inércia do manto,

$$I_{\text{manto}} = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{0.69}{1 - x^3} \right) \rho_{\text{avg}} (1 - x^5) R_{\text{Terra}}^5 = \left[\frac{0.69(1 - x^5)}{1 - x^3} \right] I_{\text{avg}}$$

O momento de inércia total é

$$I_{\text{Terra}} = I_{\text{núcleo}} + I_{\text{manto}} = 0.31x^2 I_{\text{avg}} + \left[\frac{0.69(1 - x^5)}{1 - x^3} \right] I_{\text{avg}}$$

Substituindo $x = 0.547$ conforme estabelecido no início da solução,

$$I_{\text{Terra}} = \left\{ 0.31 \times 0.547^2 + \left[\frac{0.69(1 - 0.547^5)}{1 - 0.547^3} \right] \right\} I_{\text{avg}} \approx \boxed{0.877 I_{\text{avg}}}$$

De maneira bastante rudimentar, podemos estimar um valor numérico tomando a densidade média $\rho_{\text{avg}} = (\rho_{\text{núcleo}} + \rho_{\text{manto}})/2 = (10,000 + 4500)/2 = 7250 \text{ kg/m}^3$ (os valores são de Stacey e Davis (2008)) e $R_{\text{Terra}} = 6370 \text{ km}$ para obter

$$I_{\text{avg}} = \frac{8\pi}{15} \times 7250 \times (6370 \times 10^3)^5 = 1.27 \times 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

de modo que

$$I_{\text{Terra}} \approx 0.877 I_{\text{avg}} = 0.877 \times (1.27 \times 10^{38}) \approx \boxed{1.11 \times 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

■ Prob. 2

Parte (a): A anomalia gravitacional δg associada a uma esfera enterrada é dada por

$$\delta g_z = \frac{4G\Delta\rho\pi b^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Temos a constante gravitacional $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, o contraste de densidades $\Delta\rho = 300 \text{ kg/m}^3$, o raio $b = 1000 \text{ m}$, a profundidade $h = 2000 \text{ m}$ e $x = 0$. (Note que tomamos $x = 0$ porque a anomalia *máxima* ocorre no ponto da superfície que, quando ligado ao centro da esfera, produz um segmento perpendicular à superfície; em outras palavras, o ponto está diretamente acima da esfera.) Substituindo na equação precedente, vem

$$\delta g_z = \frac{4 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times 300 \times \pi \times 1000^3 \times 2000}{3 \times (0^2 + 2000^2)^{3/2}} = 2.10 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2 = \boxed{21.0 \text{ gu}}$$

Parte (b): Basta substituir $x = 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$ na equação utilizada no item anterior,

$$\delta g_z = \frac{4 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times 300 \times \pi \times 1000^3 \times 2000}{3 \times (5000^2 + 2000^2)^{3/2}} = 1.07 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 = \boxed{1.07 \text{ gu}}$$

■ Prob. 3

Parte (a): A anomalia gravitacional δg associada a um cilindro infinitamente longo é dada por

$$\delta g = \frac{G\Delta\rho 2\pi b^2 d}{x^2 + d^2}$$

O valor máximo ocorre em $x = 0$, isto é, no ponto da superfície perpendicular ao eixo central do cilindro. Ademais, temos $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $\Delta\rho = 200 \text{ kg/m}^3$, $b = 1000 \text{ m}$ e $d = 1000 \text{ m}$. Segue que a anomalia que buscamos é

$$\delta g = \frac{(6.67 \times 10^{-11}) \times 200 \times 2\pi \times 1000^2 \times 1000}{0^2 + 1000^2} = 8.38 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2 = \boxed{83.8 \text{ gu}}$$

Parte (b): Designando com subscritos 1 e 2 as condições associadas aos cilindros das partes (a) e (b), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \delta g_1 = \delta g_2 &\rightarrow \frac{G\Delta\rho 2\pi b_1^2 d_1}{x^2 + d_1^2} = \frac{G\Delta\rho 2\pi b_2^2 d_2}{x^2 + d_2^2} \\ \therefore \frac{\cancel{G}\cancel{\Delta\rho} \cancel{2\pi} b_1^2 d_1}{0^2 + d_1^2} &= \frac{\cancel{G}\cancel{\Delta\rho} \cancel{2\pi} b_2^2 d_2}{0^2 + d_2^2} \\ \therefore \frac{\Delta\rho_1 b_1^2}{d_1} &= \frac{\Delta\rho_2 b_2^2}{d_2} \\ \therefore \frac{200 \times 1000^2}{1000} &= \frac{\Delta\rho_2 \times 50,000^2}{100,000} \\ \therefore \Delta\rho_2 &= \frac{200 \times 1000^2}{1000} \times \frac{100,000}{50,000^2} = \boxed{8 \text{ kg/m}^3} \end{aligned}$$

■ Prob. 4

Na posição 1, aplicamos uma correção ar-livre $0.3086 \times 400 = 123.44$ mGal para uma elevação de 400 m e uma correção Bouguer $-0.04193 \times 400 \times 2.67 = -44.78$ mGal; a correção total é $123.44 - 44.78 = +78.66$ mGal.

Na posição 2, tem-se a correção ar-livre $0.3086 \times 200 = 61.72$ mGal. Esta deve ser acrescentada à gravidade observada. Deve-se acrescentar uma correção de Bouguer para uma camada de 200 m de espessura, mas, por outro lado, deve-se também *deduzir* uma correção de Bouguer para uma camada de 200 m; segue que as duas contribuições se cancelam e resta apenas a supracitada correção ar-livre; a correção total é $+61.72$ mGal.

Na posição 3, estamos no nível d'água e não há contribuição ar-livre. Devemos incluir uma correção Bouguer de $0.04193 \times 400 \times 2.67 = +44.78$ mGal; esse é o valor da correção total.

Na posição 4, subtrai-se uma correção ar-livre $-0.3086 \times 100 = -30.86$ mGal pois o ponto em questão está 100 m abaixo do nível d'água. Pelo mesmo motivo, acrescentamos uma correção Bouguer $0.04193 \times 100 \times 2.67 = 11.195$ mGal. Acrescentamos ainda uma segunda correção Bouguer $0.04193 \times 400 \times 2.67 = +44.78$ mGal para contabilizar os 400 m de material acima do nível d'água. A correção total é $-30.86 + 11.195 + 44.78 = +25.12$ mGal.

■ Prob. 5

A anomalia gravitacional atinente a um cilindro horizontal é dada por

$$g_{\text{cil}} = G\Delta\rho 2\pi R^2 \frac{z}{(x^2 + z^2)}$$

No presente caso, temos a resolução do instrumento $g_{cil} = 0.1 \text{ mGal} = 0.1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$, a constante gravitacional $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$, o contraste de densidades $|\Delta\rho| = 3.0 - 2.3 = 0.7 \text{ g/cm}^3$, a distância horizontal $x = 0$ e a distância vertical $z = 100 \text{ m} = 10,000 \text{ cm}$. Podemos substituir as variáveis pertinentes no Mathematica e resolver para R com o comando *Solve*,

$$\text{In[209]:= Solve}\left[0.1 * 10^{-3} == 6.67 * 10^{-8} * 2 * \text{Pi} * R^2 * 0.7 * \frac{100 * 100}{(100 * 100)^2}, R\right]$$

$$\text{Out[209]= } \{ \{R \rightarrow -1846.28\}, \{R \rightarrow 1846.28\} \}$$

O resultado negativo não tem significado físico; a solução que buscamos é $R = 1846.28 \text{ cm} \approx 18.5 \text{ m}$. Segue que, para ser detectado pelo instrumento de sondagem gravitacional, o depósito mineral cilíndrico deve ter um diâmetro mínimo de aproximadamente 18 metros e meio.

■ Prob. 6

O solo saturado possui densidade inicial $2.60 \times 60\% + 1.0 \times 40\% = 1.96 \text{ g/cm}^3$. Após o bombeamento, a densidade do solo passa a ser $2.60 \times 60\% + 1.0 \times 28\% + 0 \times 12\% = 1.84 \text{ g/cm}^3$. Assim sendo, o contraste de densidades é -0.12 g/cm^3 . Por conveniência, a assertiva nos diz que o cone de depressão pode ser modelado como um cilindro de raio $R = 300 \text{ m} = 30,000 \text{ cm}$ e profundidade $z = 300 \text{ m} = 30,000 \text{ cm}$. Supõe-se que o instrumento está posicionado verticalmente acima do poço, isto é, em $x = 0$. A gravidade acusada nessa posição será

$$g_{cil} = G\Delta\rho 2\pi R^2 \frac{z}{(x^2 + z^2)} = (6.67 \times 10^{-8}) \times 0.12 \times 2\pi \times 30,000^2 \times \frac{30,000}{0^2 + 30,000^2}$$

$$\therefore g_{cil} = 0.00151 \text{ cm/s}^2$$

$$\therefore g_{cil} = 1.51 \text{ mGal}$$

Esse resultado é ligeiramente maior que a precisão do instrumento, que é igual a 1 mGal. Por conseguinte, o instrumento é capaz de detectar a anomalia produzida pela zona de depressão.

■ Prob. 7

A anomalia gravitacional medida possui **(1)** uma variação devido à elevação acima do elipsoide de referência e a correspondente variação de espessura da ‘placa de Bouguer’; e **(2)** uma contribuição de origem profunda. Ignorando detalhes granulares como correções de maré ou topografia, a anomalia de Bouguer Δg_B torna-se

$$\Delta g_B = g_m + \Delta g_c - g_N \quad \text{(I)}$$

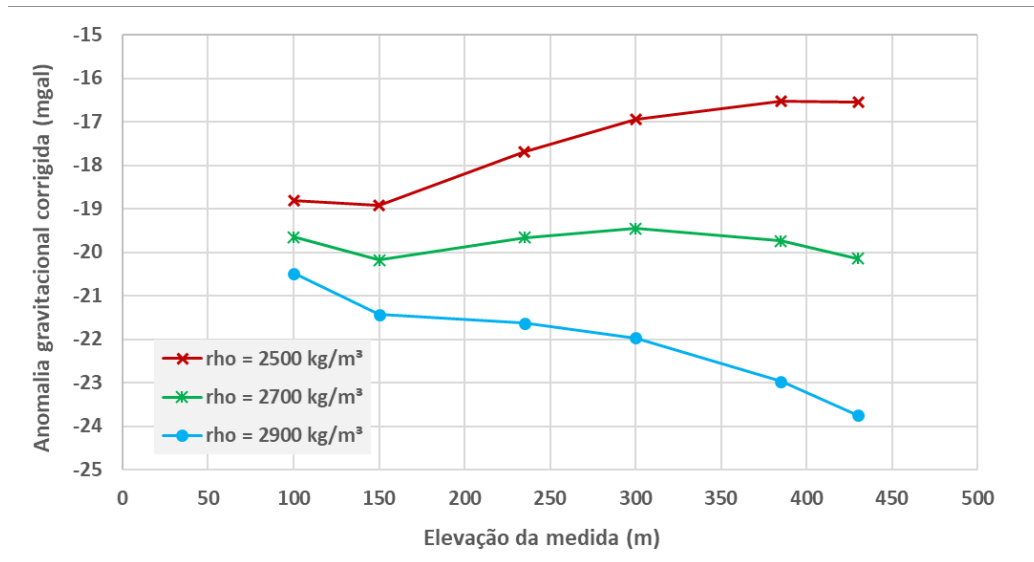
onde g_m é a gravidade medida (fornecida pela tabela); g_N é o valor teórico no elipsoide de referência; e Δg_c é a correção de elevação para a elevação h ,

$$\Delta g_c = (0.3086 - 0.0419\rho \times 10^{-3})h \quad \text{(II)}$$

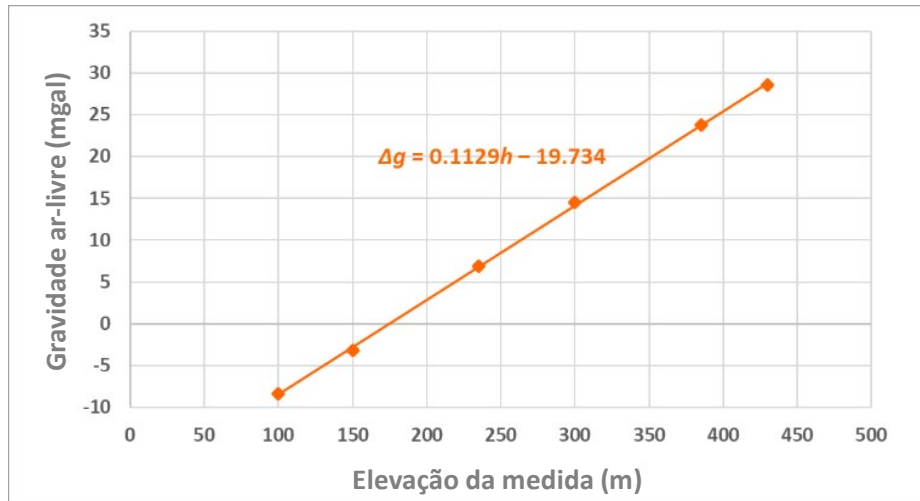
A densidade ρ é inicialmente desconhecida. Usando o método de Nettleton, inserimos valores pressupostos de ρ na equação (II) e somamos aos ajustes de gravidade para obter as gravidades corrigidas por elevação para cada estação. A densidade ótima é obtida quando a anomalia corrigida tiver a menor correlação com o perfil de elevação. Os dados são processados na tabela a seguir; observe que utilizamos $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, 2700 kg/m^3 e 2900 kg/m^3 como possíveis densidades aparentes. (A planilha está no arquivo [Cálculos Geofísica – Hoek.xlsx](#)).

Elevação (m)	Gravidade (mgal)	(1) Anomalia corrigida com $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$	(2) Anomalia corrigida com $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$	(3) Anomalia corrigida com $\rho = 2900 \text{ kg/m}^3$	Anomalia de ar livre (mgal)
100	-39.2	-18.82	-19.65	-20.49	-8.34
150	-49.5	-18.92	-20.18	-21.44	-3.21
235	-65.6	-17.70	-19.66	-21.63	6.92
300	-78.1	-16.95	-19.46	-21.97	14.48
385	-95.0	-16.52	-19.74	-22.97	23.81
430	-104.2	-16.54	-20.15	-23.75	28.50

Plotando os dados acima, verifica-se que a menor correlação com a elevação ocorre para a densidade $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ (observe que a curva obtida é aproximadamente paralela ao eixo horizontal). Sendo assim, tomamos $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ como a densidade da rocha.



Um método superior consiste em plotar a anomalia gravitacional, corrigida apenas para o efeito de ar livre (= $0.3086h$; valores listados na última coluna da tabela precedente), versus a elevação da medida. O referido gráfico é mostrado a seguir.



Conforme mostra o gráfico, os pontos estão dispostos em uma linha reta dada por $\Delta g = 0.1129h - 19.734$. O primeiro termo nessa equação de reta corresponde à correção de Bouguer; o segundo termo, por sua vez, é a anomalia de fundo, que verificamos ser aproximadamente igual a -19.7 mgal. O primeiro termo é igualado a $0.0419\rho \times 10^{-3}$, fornecendo assim a densidade desconhecida ρ ,

$$0.1129 = 0.0419\rho \times 10^{-3} \rightarrow \rho = \frac{0.1129}{0.0419 \times 10^{-3}}$$

$$\therefore \boxed{\rho = 2695 \text{ kg/m}^3}$$

■ Prob. 8

Parte (a): Na aproximação de uma Terra esférica, a gravidade superficial é $g = GM^2/R$, independentemente da distribuição radial de densidade, e $M = (4\pi/3)R^3\bar{\rho}$. Sendo g conhecida com razoável precisão, conclui-se que se $\bar{\rho}$ é determinada, então G é fixo, ou vice-versa.

Parte (b): A uma profundidade z (raio $r = R - z$), a gravidade deve-se apenas ao material no interior de r , cuja massa é $m(r)$; a aceleração gravitacional correspondente é $g = Gm(r)/r^2$. Sendo ρ a densidade de uma camada, diferenciamos g em relação a r para obter

$$\frac{dg}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{Gm(r)}{r^2} \right] = \frac{G}{r^2} \frac{dm}{dr} - \frac{2Gm(r)}{r^3}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = \frac{G}{r^2} \times 4\pi r^2 \rho - \frac{2g}{r}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = 4\pi G\rho - \frac{2g}{r}$$

Igualando a última passagem a zero,

$$4\pi G\rho - \frac{2g}{r} = 0 \rightarrow 4\pi G\rho = \frac{2g}{r}$$

$$\therefore 2\pi G\rho = \frac{g}{r}$$

$$\therefore 2\pi G\rho = \frac{Gm(r)}{r^3}$$

$$\therefore 2\pi \cancel{G}\rho = \frac{\cancel{G} \times (4\pi/3)\bar{\rho}r^3}{r^3}$$

$$\therefore 2\pi\rho = \frac{(4\pi/3)\bar{\rho}\cancel{r^3}}{\cancel{r^3}}$$

$$\therefore 2\pi\rho = \left(\frac{4\pi}{3}\right)\bar{\rho}$$

$$\therefore \boxed{\rho = \frac{2}{3}\bar{\rho}}$$

Note que o gradiente ar-livre logo acima da superfície, quando $\rho \rightarrow 0$, é

$$-\left(\frac{8\pi}{3}\right)G\bar{\rho} = -\frac{2g}{R} = -\frac{2 \times 9.81}{6370 \times 10^3} = -3.08 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 = -0.308 \text{ mGal} \cdot \text{m}^{-1}$$

Parte (c): Sendo $\rho = \bar{\rho}/2$ conforme sugere o enunciado,

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi G\rho - \frac{2g}{r} = 4\pi G \times \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{2g}{r}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = 2\pi G\bar{\rho} - \left(\frac{8\pi}{3}\right)G\bar{\rho}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = -\frac{2\pi}{3}G\bar{\rho}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = -\frac{1}{4} \times \frac{8\pi}{3}G\bar{\rho}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = -\frac{1}{4} \times (-0.308) = \boxed{0.077 \text{ mGal} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Note que o gradiente crustal corresponde a um quarto do gradiente ar-livre obtido no fim da parte (b).

Parte (d): Sendo $\rho \approx 1025 \text{ kg/m}^3$ a densidade média da água marinha, o gradiente gravitacional no oceano torna-se

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi G\rho - \frac{2g}{r} = 4\pi \times (6.67 \times 10^{-11}) \times 1025 - \frac{2 \times 9.81}{6370 \times 10^3} = -2.221 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = -0.222 \text{ mGal} \cdot \text{m}^{-1}$$

■ Prob. 9

O diagrama bidimensional fornecido mostra a montanha ACD e sua 'raiz' CBD; a região subjacente à planície e ao redor da raiz pode ser interpretada como o manto.

O volume de fluido deslocado é representado pelo triângulo BCD. Se a distância de B abaixo do nível da planície CD é d , então o volume deslocado é $(1/2)d\overline{CD}$. Sendo a densidade do material deslocado igual a 3000 kg/m^3 , o empuxo F_U exercido no corpo é dado por $F_U = (1/2)d\overline{CD} \times 3000 \times g$. O empuxo de soerguimento é contrabalançado pelo peso da montanha e sua raiz. O volume de ADBC é igual ao triângulo ACD + o triângulo BCD. O ponto A está 1000 m acima de CD e o ponto B está a uma distância d abaixo deste. O volume de ADBC, portanto, é $(1/2)(d + 1000)\overline{CD}$. O peso W da montanha e sua raiz é igual à sua massa vezes a densidade de 2800 kg/m^3 , isto é, $W = (1/2)(d + 1000)\overline{CD} \times 2800 \times g$. Igualando o soerguimento F_U e o peso W e resolvendo para d , vem

$$\frac{1}{2}d(\overline{CD}) \times 3000 \times g = \frac{1}{2}(d + 1000)(\overline{CD}) \times 2800 \times g$$

$$\therefore 1500d = 1400(d + 1000)$$

$$\therefore 1500d = 1400d + 1400 \times 1000$$

$$\therefore 100d = 1400 \times 1000$$

$$\therefore d = \frac{1400 \times 1000}{100} = \boxed{14,000 \text{ m}} = 14 \text{ km}$$

■ Prob. 10

Primeiramente, calculamos a altura de A acima do nível de referência GG no diagrama (a). Seja a largura da base do bloco igual a w e a altura de A igual a h . Usando o método adotado no problema anterior, tem-se

$$\cancel{w}L \times 3000 \times \cancel{g} = \cancel{w}(L - h) \times 3200 \times \cancel{g}$$

$$\therefore 3000L = 3200L - 3200h$$

$$\therefore 3200h = 200L$$

$$\therefore h = 0.0625L$$

Em seguida, calculamos a altura de A acima do nível de referência GG no diagrama (b). Nesse caso, o retângulo superior do bloco foi erodido e tomou a forma de um triângulo de altura h' que jaz sobre um retângulo de altura $(L - h')$. Fazendo um balanço de soerguimento e peso, vem

$$\cancel{\rho} \left[\frac{1}{2} h' + (L - h') \right] \times 3000 \times \cancel{g} = \cancel{\rho} \times (L - h') \times 3200 \times \cancel{g}$$

$$\therefore \left(L - \frac{h'}{2} \right) \times 3000 = (L - h') \times 3200$$

$$\therefore 3000L - 1500h' = 3200L - 3200h'$$

$$\therefore 1700h' = 200L$$

$$\therefore h' = 0.118L$$

Portanto, a variação da altura do ponto A relativamente ao nível de referência GG é

$$\Delta h = h' - h = 0.118L - 0.0625L = \boxed{0.056L}$$

■ Prob. 11

De modo semelhante ao problema anterior, seja w a largura da base do bloco. Aplicando o mesmo método do referido problema, o volume de material deslocado com densidade 2500 kg/m^3 é $w \times (1/2)H$ e o volume de material deslocado com densidade 3000 kg/m^3 é $w \times (D - (1/2)H)$. Segue que o peso de material deslocado (e por conseguinte o empuxo de soerguimento que age no bloco) é dado por

$$w \times \left(\frac{1}{2} H \right) \times 2500g + w \times \left(D - \frac{1}{2} H \right) \times 3000g$$

Tais empuxos são resistidos pelo peso do bloco, que é

$$\frac{1}{2} w \times (D + H) \times 2000g + 2 \times \left(\frac{1}{2} w \right) \times \left(\frac{1}{2} D \right) \times 2500g$$

Igualando as duas expressões e manipulando, podemos exprimir H em função de D ,

$$\cancel{\rho} \times \left(\frac{1}{2} H \right) \times 2500g + \cancel{\rho} \times \left(D - \frac{1}{2} H \right) \times 3000g = \frac{1}{2} \cancel{\rho} \times (D + H) \times 2000g + 2 \times \left(\frac{1}{2} \cancel{\rho} \right) \times \left(\frac{1}{2} D \right) \times 2500g$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} H \right) \times 2500 \cancel{g} + \left(D - \frac{1}{2} H \right) \times 3000 \cancel{g} = \frac{1}{2} (D + H) \times 2000 \cancel{g} + 2 \times \left(\frac{1}{2} D \right) \times 2500 \cancel{g}$$

$$\therefore 1250H + \left(D - \frac{1}{2}H\right) \times 3000 = 1000(D + H) + 1250D$$

$$\therefore 1250H + 3000D - 1500H = 1000D + 1000H + 1250D$$

$$\therefore -1250H = -750D$$

$$\therefore \boxed{H = 0.6D}$$

■ Checklist Rápido 1

12.1. Alternativa D. Em ondas P, o deslocamento das partículas de rocha é paralelo à direção de propagação. Em ondas S, o deslocamento das partículas de rocha é perpendicular à direção de propagação. Em ondas Rayleigh, as partículas de rocha descrevem trajetórias elípticas. Ondas Love evidentemente são ondas de superfície.

12.2. Falso. A velocidade em questão pode ser obtida através da fórmula

$$V_P = \left[\frac{E(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)(1+\nu)} \right]^{1/2} = \left[\frac{(39 \times 10^9) \times (1-0.11)}{2600 \times (1-2 \times 0.11) \times (1+0.11)} \right]^{1/2} = \boxed{3927 \text{ m/s}}$$

12.3. Alternativa D. A impedância acústica é simplesmente o produto

$$Z_1 = \rho_1 V_1 = 2500 \times 4000 = 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \boxed{10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}}$$

12.4. Alternativa C. Começamos calculando o coeficiente de reflexão,

$$R = \frac{\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1}{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1} = \frac{2600 \times 4500 - 2500 \times 4000}{2600 \times 4500 + 2500 \times 4000} = 0.078$$

Lembrando que os coeficientes de reflexão e transmissão são relacionados pela fórmula simples $T = 1 - R$, temos

$$T = 1 - R = 1 - 0.078 = \boxed{0.922} \approx 0.92$$

12.5. Verdadeiro. De fato, no WGS-84 e sistemas semelhantes há uma diferença radial de cerca de 21 km entre o eixo equatorial e o eixo polar do elipsoide oblato, o que corresponde a uma diferença de cerca de 0.34% do raio de uma Terra esférica (≈ 6371 km).

12.6. Falso. Sabe-se que a gravidade equatorial terrestre é aproximadamente igual a 9.78 m/s^2 . Usando a equação de Torricelli com $v_0 = v$ (velocidade inicial v), $v_f = 0$ (velocidade final = 0), $\alpha = -g_E = -9.78 \text{ m/s}^2$ (aceleração vertical negativa igual à aceleração no equador terrestre $\approx -9.78 \text{ m/s}^2$) e $h_{max} = 3.6 \text{ m}$ (altura máxima alcançada no salto), podemos escrever

$$v_f^2 = v_0^2 + 2h_{\max}(-g_E)$$

$$\therefore 0 = v_0^2 - 2h_{\max}g_E$$

$$\therefore v_0^2 = 2h_{\max}g_E$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{2h_{\max}g_E} \quad \text{(I)}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{2 \times 3.6 \times 9.78} = 8.39 \text{ m/s}$$

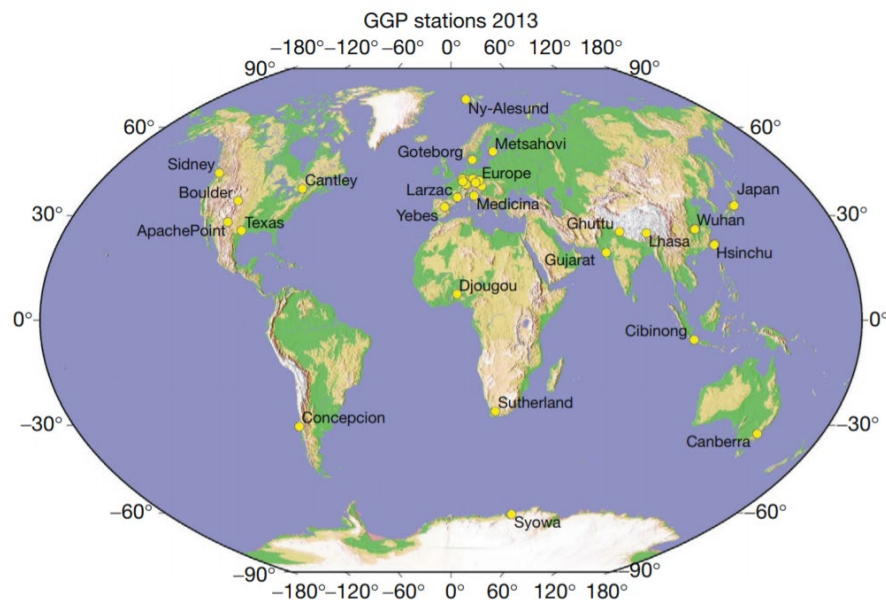
(Convém observar que a equação (I) também poderia ser obtida igualando a energia cinética do atleta logo antes de iniciar o salto e a energia potencial gravitacional associada ao ponto mais alto do salto.) Supondo que a equação (I) também é válida na lua, e supondo também que a velocidade v_0 logo antes do salto é a mesma nos dois corpos, podemos obter a altura h'_{\max} atingida pelo atleta na lua,

$$v_0 = \sqrt{2h'_{\max}g_L} \rightarrow v_0^2 = 2h'_{\max}g_L$$

$$\therefore h'_{\max} = \frac{v_0^2}{2g_L} = \frac{8.39^2}{2 \times 1.62} = \boxed{21.7 \text{ m}}$$

12.7. Falso. Na equação fornecida, H é a altitude ortométrica, h é a altitude geométrica e N é a ondulação da geóide.

12.8. Falso. A figura a seguir mostra a distribuição de estações do GGP em 2013. É fácil observar que, em contraste com o que diz a assertiva, a maior parte das estações de observação geodética mantidas pelo GGP encontra-se no hemisfério norte.



12.9. Alternativa B. Sabendo que compensação do tipo Airy é válida, podemos escrever um equilíbrio isostático e estimar a espessura h_o da crosta oceânica,

$$50 \times 2900 = 5 \times 1030 + h_o \times 2900 + (50 - 5 - h_o) \times 3300$$

$$\therefore 145,000 = 5150 + 2900h_o + 148,500 - 3300h_o$$

$$\therefore 145,000 = 153,650 - 400h_o$$

$$\therefore 400h_o = 153,650 - 145,000$$

$$\therefore h_o = \frac{153,650 - 145,000}{400} = \boxed{21.6 \text{ km}}$$

12.10. Alternativa C. Por inspeção, vê-se que $t = 20 \text{ Ma}$, logo $z = 11 \times 20^{1/2} \approx 49 \text{ km}$.

■ **Prob. 13**

Parte (a): Há cerca de 8 picos em 200 segundos, logo o período é $T \approx 200/8 = 25 \text{ sec}$. A frequência correspondente é $f = 1/25 = 0.04 \text{ Hz}$.

Parte (b): A amplitude da onda Rayleigh é $A \approx 300 \mu\text{m} = 3 \times 10^{-4} \text{ m}$. O comprimento de onda Λ , lembrando que $c = 3.9 \text{ km/s}$ para as ondas superficiais em foco, é dado por

$$\Lambda = cT = 3.9 \times 25 = 97.5 \text{ km}$$

Por conveniência, utilizamos $\Lambda \approx 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}$. O número de onda é então $k = 2\pi/\Lambda = 2\pi/10^5 = 6.28 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. O deslocamento de uma onda harmônica pode ser descrito por $u_x = A \times \sin(kx)$, de modo que a deformação correspondente torna-se

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = kA \cos(kx)$$

A deformação máxima ocorre quando $\cos(kx) = 1$ e é tal que

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{\max} = kA = (6.28 \times 10^{-5}) \times (3 \times 10^{-4}) = \boxed{1.88 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}}$$

■ **Prob. 14**

Conhecendo o coeficiente de Poisson $\nu = 0.25 = 1/4$, podemos estimar a razão de velocidades de onda α/β ,

$$\nu = \frac{(\alpha^2 - 2\beta^2)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 4(\alpha^2 - 2\beta^2) = 2(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\therefore 4\alpha^2 - 8\beta^2 = 2\alpha^2 - 2\beta^2$$

$$\therefore 2\alpha^2 = 6\beta^2$$

$$\therefore \alpha = \sqrt{3}\beta$$

Sendo t_s e t_p os tempos de percurso das ondas S e P, respectivamente, sabemos que há um intervalo de 5 minutos ou 300 sec entre as duas ondas; portanto, $t_s - t_p = 300$ sec. Ademais, temos $\alpha/\beta = \sqrt{3}$ conforme obtido acima. Podemos prosseguir e determinar o tempo de percurso da onda P,

$$t_s - t_p = t_p \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \rightarrow t_p = \frac{t_s - t_p}{\alpha/\beta - 1}$$

$$\therefore t_p = \frac{300}{\sqrt{3} - 1} = 410 \text{ sec}$$

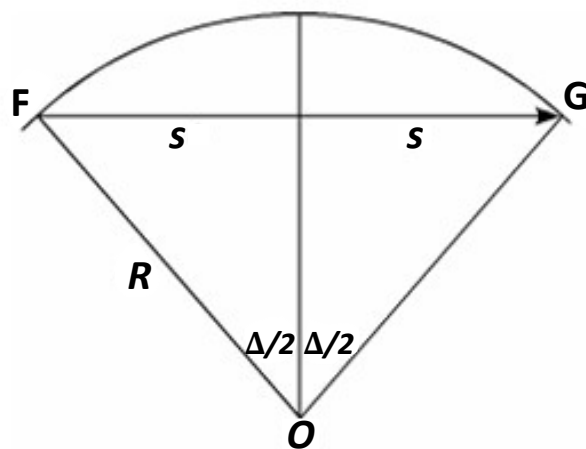
O terremoto ocorreu 410 sec, ou 6 min 50 sec, antes do tempo de chegada da onda P, que é 11:45; portanto, o terremoto ocorreu às 10:39:10 (10 segundos após as 10:39). Recorrendo à ilustração a seguir, prosseguimos à determinação da distância epicentral angular. Se a velocidade α da onda P é constante e igual a 5 km/s, a distância até o foco do terremoto é $410 \times 5 = 2050$ km. Supondo que as velocidades sísmicas são constantes, o raio é uma linha reta (vide ilustração). Sendo $s = 2050/2 = 1025$ km e $R = 6371$ km, o ângulo epicentral Δ é

$$\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{s}{R} \rightarrow \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{1025}{6371}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 0.1609$$

$$\therefore \frac{\Delta}{2} = \arcsin(0.1609)$$

$$\therefore \Delta = 2 \times \arcsin(0.1609) = 0.323 \text{ rad} = \boxed{18.51^\circ}$$



■ Prob. 15

Sabendo que o granito pode ser modelado como um sólido de Poisson, podemos escrever $\beta = \alpha/\sqrt{3} = 5.5/\sqrt{3} = 3.18$ km/s. Lembrando que $\lambda = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2)$ e $\mu = \rho\beta^2$, determinamos os parâmetros de Lamé como

$$\lambda = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) = 2600 \times (5500^2 - 2 \times 3180^2) = 2.61 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\therefore \boxed{\lambda = 26.1 \text{ GPa}}$$

$$\mu = \rho\beta^2 = 2600 \times 3180^2 = 2.62 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\therefore \boxed{\mu = 26.2 \text{ GPa}}$$

Como estamos trabalhando com um sólido de Poisson, tem-se $\lambda = \mu$; a pequena diferença observada nos cálculos acima decorre do arredondamento. Podemos utilizar $\lambda = \mu$ para obter o módulo de Young,

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} = \frac{(3\lambda + 2 \times \lambda) \times \lambda}{\lambda + \lambda} = 2.5\lambda$$

$$\therefore E = 2.5 \times 26.3 = \boxed{65.8 \text{ GPa}}$$

Por fim, o módulo de compressibilidade é

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 26.1 + \frac{2}{3} \times 26.2 = \boxed{43.6 \text{ GPa}}$$

■ Prob. 16

Parte (a): Basta resolver as equações que fornecem as velocidades de onda α e β para os parâmetros μ e λ ; as expressões assim obtidas são

$$\mu = \rho\beta^2$$

$$\lambda = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2)$$

Parte (b): Busca-se exprimir a velocidade do som $V_c = \sqrt{\kappa/\rho}$ em termos de α e β ; para tanto, escrevemos

$$\lambda + 2\mu = \rho\alpha^2$$

$$\mu = \rho\beta^2$$

$$\lambda = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2)$$

Sendo o módulo de compressibilidade dado por $\kappa = \lambda + (2/3)\mu$, tem-se

$$\begin{aligned}\kappa &= \lambda + \frac{2}{3}\mu = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) + \frac{2}{3}\rho\beta^2 \\ \therefore \kappa &= \rho\left(\alpha^2 - 2\beta^2 + \frac{2}{3}\beta^2\right) \\ \therefore \kappa &= \rho\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\beta^2\right)\end{aligned}$$

Substituindo na definição de V_c , vem

$$V_c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{\cancel{\rho}\left[\alpha^2 - (4/3)\beta^2\right]}{\cancel{\rho}}} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{4}{3}\right)\beta^2}$$

A expressão acima fornece a velocidade do som em massa como função das velocidades sísmicas α e β .

Parte (c): Para um sólido de Poisson, $\alpha = \sqrt{3}\beta$, ou seja, $\beta^2 = (1/3)\alpha^2$. Substituindo na expressão obtida na parte anterior, vem

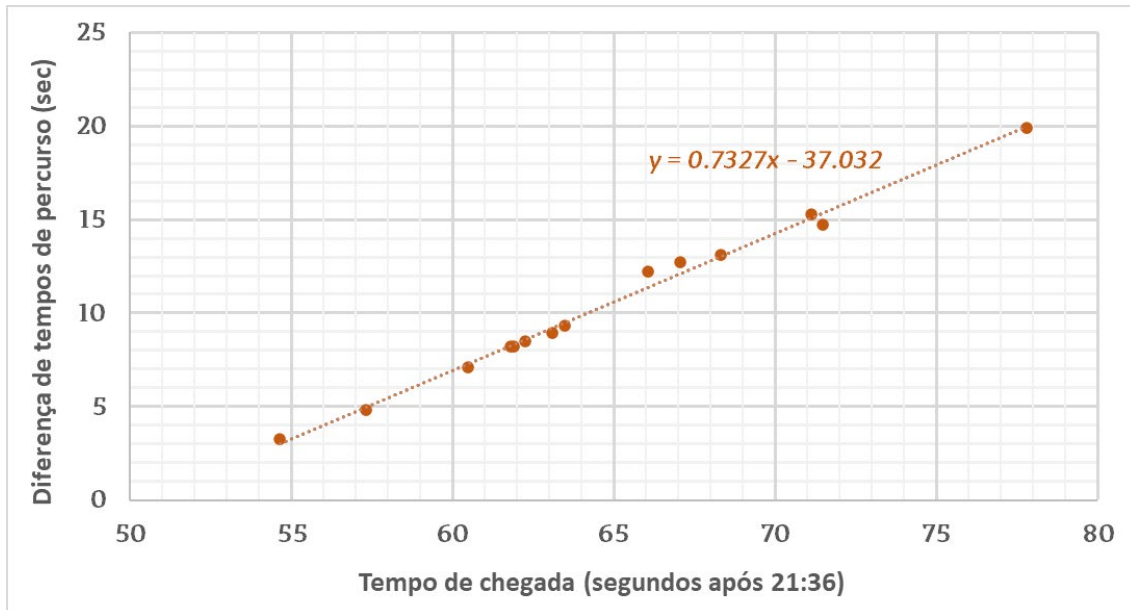
$$V_c = \sqrt{\alpha^2 - \frac{4}{3}\beta^2} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}\alpha^2} = \sqrt{\frac{5}{9}\alpha^2} = \boxed{0.745\alpha}$$

■ Prob. 17

Parte (a): Os dados são processados na tabela a seguir. (A planilha está no arquivo [Cálculos Geofísica – Hoek.xlsx](#)).

Estação	Horário das medidas	t_p (sec)	t_s (sec)	$t_s - t_p$ (sec)	t_p após 21:36
Alfa	21:36	54.65	57.9	3.25	54.65
Beta	21:36	57.34	62.15	4.81	57.34
Gamma	21:37	0.49	7.55	7.06	60.49
Delta	21:37	1.8	10	8.2	61.80
Epsilon	21:37	1.9	10.1	8.2	61.90
Zeta	21:37	2.25	10.7	8.45	62.25
Eta	21:37	3.1	12	8.9	63.10
Teta	21:37	3.5	12.8	9.3	63.50
Iota	21:37	6.08	18.3	12.22	66.08
Kappa	21:37	7.07	19.79	12.72	67.07
Lambda	21:37	8.32	21.4	13.08	68.32
Mu	21:37	11.12	26.4	15.28	71.12
Nu	21:37	11.5	26.2	14.7	71.50
Xi	21:37	17.8	37.7	19.9	77.80

Prosseguindo, plotamos a diferença $t_p - t_s$ (coluna vermelha) *versus* o tempo a partir de 21:36 (coluna azul). A equação de ajuste é mostrada ao lado da reta obtida através de regressão linear.



Parte (b): Comparando a equação de ajuste obtida na parte (a),

$$y = 0.7327x - 37.032$$

e a equação de Wadati,

$$t_s - t_p = t_p \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right)$$

é fácil ver que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 0.7327$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = 0.7327 + 1 \approx \boxed{1.733}$$

Parte (c): A interseção da reta de melhor ajuste com o eixo vertical é -37.03 ; usando a declividade da reta obtida na parte (a), podemos obter a interseção com o eixo x , determinando então o tempo de ocorrência do terremoto,

$$y = 0.7327x - 37.032 \rightarrow 0.7327x = y + 37.032$$

$$\therefore x = \frac{y}{0.7327} + \frac{37.032}{0.7327}$$

$$\therefore x = 1.365y + 50.54$$

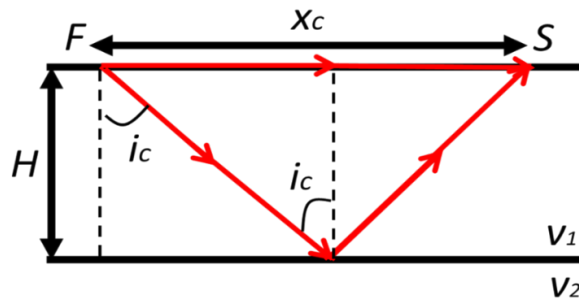
O terremoto ocorreu cerca de 50.5 segundos após 21:36.

■ **Prob. 18**

A distância crítica x_c é a distância na qual um raio refletido no topo do manto com ângulo crítico retorna à superfície da crosta. No presente caso (vide figura a seguir), tem-se

$$x_c = 2H \tan i_c = 90 \text{ km} \quad \text{(I)}$$

onde H é a espessura da crosta.



Como informa o enunciado, as velocidades v_1 e v_2 são tais que $v_2 = 1.25v_1$; podemos utilizar essa informação para estimar o ângulo crítico i_c ,

$$\frac{\sin i_c}{v_1} = \frac{1}{v_2} \rightarrow \frac{\sin i_c}{\cancel{v_1}} = \frac{1}{1.25\cancel{v_1}}$$

$$\therefore \sin i_c = 0.8$$

$$\therefore i_c = \arcsin(0.8) = 53.1^\circ$$

Substituindo na equação (I), obtemos a espessura H ,

$$2H \tan i_c = 90 \rightarrow 2 \times H \times \tan(53.1^\circ) = 90$$

$$\therefore H = \frac{90}{2 \times \tan(53.1^\circ)}$$

$$\therefore \boxed{H = 33.8 \text{ km}}$$

Utilizando a equação para tempo de trajetória de um raio refletido crítico, podemos estimar a velocidade v_1 ,

$$t = \frac{2H}{v_1 \cos i_c} \rightarrow v_1 = \frac{2H}{t \cos i_c}$$

$$\therefore v_1 = \frac{2 \times 33.8}{16 \times \cos(53.1^\circ)} = \boxed{7.04 \text{ km/s}}$$

A velocidade v_2 , por sua vez, é

$$v_2 = 1.25v_1 = 1.25 \times 7.04 = \boxed{8.80 \text{ km/s}}$$

Para construir os gráficos de tempo de trajetória solicitados no enunciado, denotamos os tempos t_1 (raio direto), t_2 (raio refletido) e t_3 (raio criticamente refratado) e escrevemos

$$t_1 = \frac{x}{v_1}$$

$$t_2 = \frac{2}{v_1} \sqrt{\frac{x^2}{4} + H^2}$$

$$t_3 = \frac{x}{v_2} + \frac{2H\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}$$

onde x denota a distância horizontal percorrida por cada raio. Substituindo as variáveis pertinentes, vem

$$t_1 = \frac{x}{7.04} = 0.142x$$

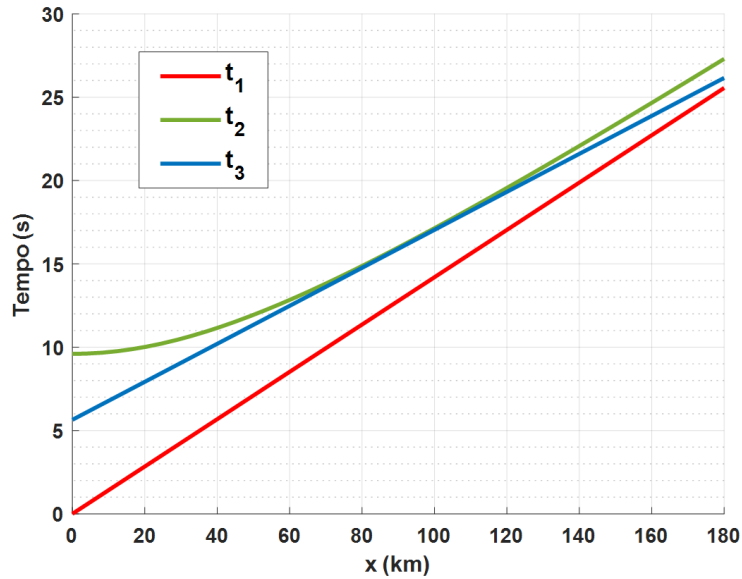
$$t_2 = \frac{2}{7.04} \times \sqrt{\frac{x^2}{4} + 33.8^2} = 0.142\sqrt{x^2 + 4570}$$

$$t_3 = \frac{x}{8.80} + \frac{2 \times 33.1 \times \sqrt{8.80^2 - 7.04^2}}{7.04 \times 8.80} = 0.114x + 5.642$$

Resta apenas plotar as equações acima com o programa de escolha do aluno. Utilizando a caixa de ferramentas de matemática simbólica do MATLAB, tem-se

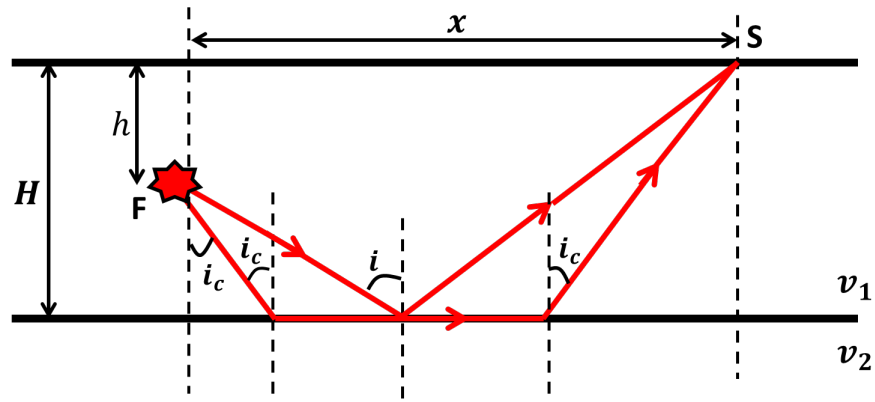
```
syms x
t1 = 0.142*x;
t2 = 0.142*sqrt(x^2 + 4570);
t3 = 0.114*x + 5.642;
figure
hold on
fplot(t1, [0,180], 'LineWidth', 2, 'Color', 'red')
fplot(t2, [0,180], 'LineWidth', 2, 'Color', '#77AC30')
fplot(t3, [0,180], 'LineWidth', 2, 'Color', '#0072BD')
hold off
```

O gráfico é mostrado na página a seguir.



■ **Prob. 19**

A situação presente é ilustrada a seguir. O foco é denotado pela estrela vermelha F e a posição superficial de interesse é denotada pelo ponto S .



A distância crítica é dada por

$$x_c = (2H - h) \tan i_c \quad \text{(I)}$$

onde o ângulo crítico i_c é

$$\sin i_c = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow i_c = \arcsin\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$$

$$\therefore i_c = \arcsin\left(\frac{5}{7.2}\right) = 44.0^\circ$$

Substituindo em (I),

$$x_c = (2H - h) \tan i_c = (2 \times 26 - 15) \times \tan(44^\circ) = 35.7 \text{ km}$$

Como a distância $x = 180$ km é substancialmente maior que x_c , concluímos que haverá raios criticamente refratados. Os tempos de trajetória dos raios refletidos (t_2) e criticamente refratados (t_3) à distância x são, respectivamente,

$$t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (2H - h)^2}}{v_1} = \frac{\sqrt{180^2 + (2 \times 26 - 15)^2}}{5} = 36.8 \text{ s}$$

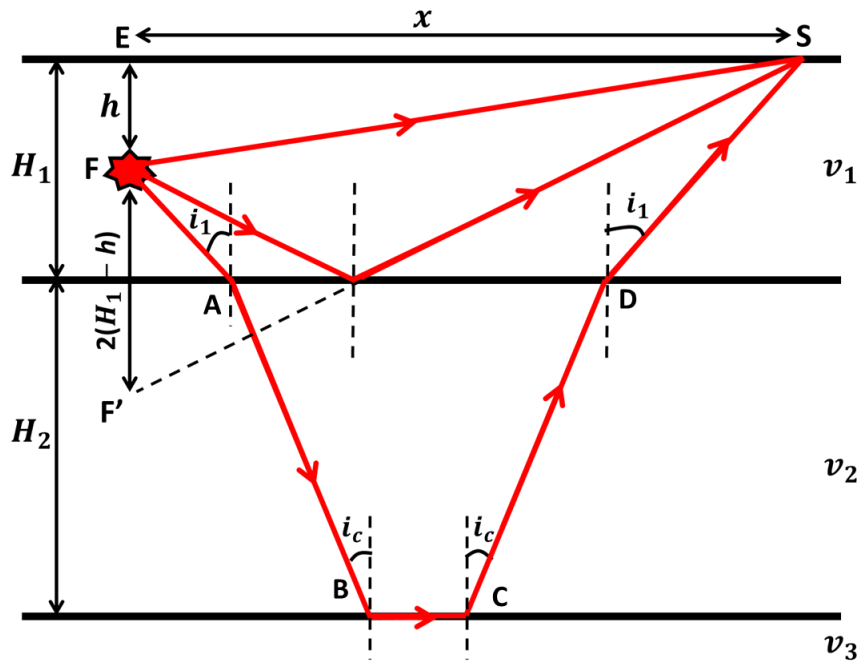
$$t_3 = \frac{x}{v_2} + \frac{(2H - h)\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} = \frac{180}{7.2} + \frac{(2 \times 26 - 15) \times \sqrt{7.2^2 - 5^2}}{5 \times 7.2} = 30.3 \text{ s}$$

Por fim, a diferença $|t_2 - t_3|$ é

$$|t_2 - t_3| = |36.8 - 30.3| = \boxed{6.5 \text{ sec}}$$

■ Prob. 20

Considere a seguinte ilustração.



O tempo de trajetória t_1 do raio direto pode ser obtido a partir da geometria da figura,

$$t_1 = \frac{\sqrt{EF^2 + ES^2}}{v_1} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1}$$

$$\therefore t_1 = \frac{\sqrt{10^2 + 120^2}}{8} = \boxed{15.1 \text{ s}}$$

O tempo de trajetória do raio refletido no fundo da primeira camada, por sua vez, é

$$t_2 = \frac{\sqrt{EF' + ES}}{v_1} = \frac{\sqrt{[2(H_1 - h) + h]^2 + x^2}}{v_1}$$

$$\therefore t_2 = \frac{\sqrt{[2 \times (15 - 10) + 10]^2 + 120^2}}{8} = \boxed{15.2 \text{ s}}$$

Sabendo que a velocidade sísmica na segunda camada é menor que a velocidade na primeira, conclui-se que não haverá refração crítica na fronteira entre as duas camadas. Diferentemente, sabe-se que há refração crítica entre a segunda camada e o manto, uma vez que a velocidade deste último é maior que a velocidade no segundo estrato. Recorremos à lei de Snell para determinar o ângulo crítico i_c e o ângulo de incidência i_1 indicado na ilustração precedente,

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_c}{v_2} = \frac{1}{v_3} \rightarrow \sin i_c = \frac{v_2}{v_3}$$

$$\therefore \sin i_c = \frac{6.5}{9.2} = 0.707$$

$$\therefore i_c = \arcsin(0.707) = 45.0^\circ$$

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_c}{v_2} = \frac{1}{v_3} \rightarrow \sin i_1 = \frac{v_1}{v_3}$$

$$\therefore \sin i_1 = \frac{8}{9.2} = 0.870$$

$$\therefore i_1 = \arcsin(0.870) = 60.4^\circ$$

O tempo de trajetória t_3 do raio criticamente refratado no fundo da segunda camada é dado por

$$t_3 = \frac{\overline{FA}}{v_1} + \frac{\overline{AB}}{v_2} + \frac{\overline{BC}}{v_3} + \frac{\overline{CD}}{v_2} + \frac{\overline{DS}}{v_1} \quad \text{(I)}$$

Os pontos A e D estão indicados na ilustração precedente. Prossequimos ao cálculo dos segmentos \overline{FA} e \overline{DS} ,

$$\cos i_1 = \frac{H_1 - h}{FA} = \frac{H_1}{DS} \rightarrow \cos 60.4^\circ = \frac{15 - 10}{FA}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{FA} &= \frac{15-10}{\cos 60.4^\circ} = 10.1 \text{ km} \\ \cos i_1 &= \frac{H_1 - h}{FA} = \frac{H_1}{DS} \rightarrow \cos 60.4^\circ = \frac{H_1}{DS} \\ \therefore \overline{DS} &= \frac{15}{\cos 60.4^\circ} = 30.4 \text{ km}\end{aligned}$$

Usando o ângulo de incidência crítico, determina-se o segmento \overline{AB} ,

$$\begin{aligned}\cos i_c &= \frac{H_2}{AB} \rightarrow \overline{AB} = \frac{H_2}{\cos i_c} \\ \therefore \overline{AB} &= \frac{25}{\cos 45.0^\circ} = 35.4 \text{ km}\end{aligned}$$

Pelas leis de reflexão, temos $\overline{CD} = \overline{AB} = 35.4 \text{ km}$. O último segmento desconhecido é \overline{BC} ,

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= x - 2H_2 \tan i_c - (H_1 - h) \tan i_1 \\ \therefore \overline{BC} &= 120 - 2 \times 25 \times \tan(45.0^\circ) - (15 - 10) \times \tan(60.4^\circ) = 61.2 \text{ km}\end{aligned}$$

Resta apenas substituir os valores calculados até aqui na equação **(I)**,

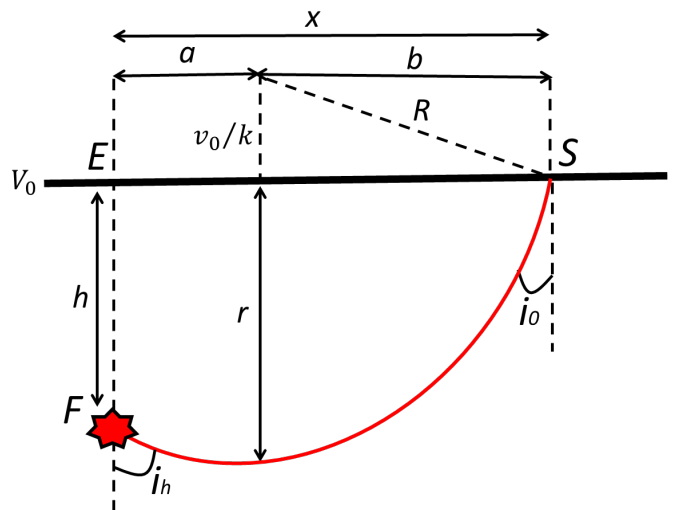
$$t_3 = \frac{10.1}{8} + \frac{35.4}{6.5} + \frac{61.2}{9.2} + \frac{35.4}{6.5} + \frac{30.4}{8} = \boxed{22.6 \text{ s}}$$

■ Prob. 21

Parte (a): O raio se propaga em uma trajetória circular, como ilustrado ao lado. Na profundidade máxima r de penetração do raio, o ângulo de incidência do raio com a vertical é 90° . Usando a lei de Snell, podemos associar o ângulo no foco, i_h ; o ângulo associado ao raio r , $i = 90^\circ$ (profundidade máxima de penetração); e o ângulo de incidência na superfície, i_0 . Recorrendo à lei de Snell,

$$\frac{\sin i_0}{v_0} = \frac{1}{v_0 + kr} = \frac{\sin i_h}{v_0 + kh}$$

$$\therefore \sin i_h = \frac{v_0 + kh}{v_0 + kr} \quad \text{(I)}$$



Conforme ilustra a figura precedente, raios projetados em um meio no qual a variação de velocidade com profundidade é linear seguem trajetórias circulares. Segue que o raio R mostrado na figura é dado por

$$R = \frac{v_0}{k} + r$$

A distância epicentral x é dada pela soma de a e b , os quais são descritos pelas expressões

$$a = \sqrt{\left(\frac{v_0}{k} + r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2} ; \quad b = \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}$$

Por conseguinte,

$$x = a + b \quad \rightarrow \quad b = x - a$$

$$\therefore \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = x - \sqrt{\left(\frac{v_0}{k} + r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2}$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{v_0}{k} + r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2} = x - \sqrt{\left(\frac{v_0}{k} + r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2}$$

Resolvendo para r ,

$$r = \sqrt{\left[\frac{x^2 - h^2 - 2(v_0/k)h}{2x}\right]^2 + \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2} - \frac{v_0}{k}$$

Substituindo este último resultado em **(I)**,

$$\sin i_h = \frac{v_0 + kh}{v_0 + k \left\{ \sqrt{\left[\frac{x^2 - h^2 - 2(v_0/k)h}{2x}\right]^2 + \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2} - \frac{v_0}{k} \right\}}$$

Como desejado, a expressão acima fornece o (seno do) ângulo de disparo i_h como função dos parâmetros x , v_0 , h e k .

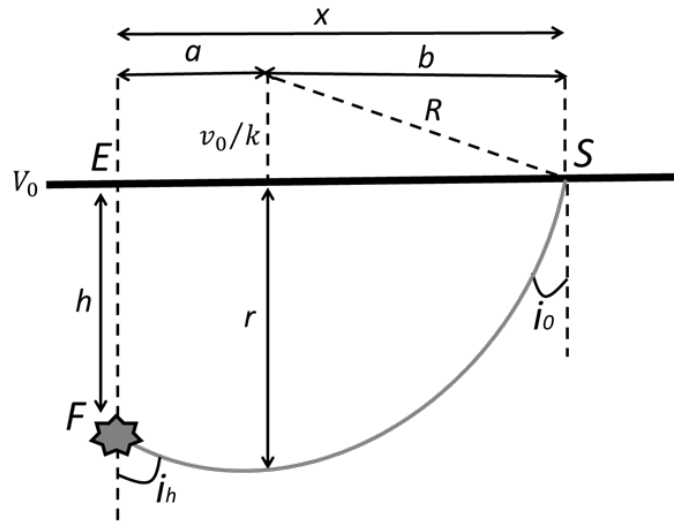
Parte (b): A velocidade do raio ao abandonar o foco pode ser obtida substituindo $z = 12$ km no perfil de velocidades fornecido,

$$v = 3.6 + 0.1z = 3.6 + 0.1 \times 12 = 4.8 \text{ km/s}$$

Utilizando a lei de Snell, podemos estimar a velocidade no ponto de disparo do raio com maior profundidade de penetração (isto é, o raio para o qual $i = 90^\circ$),

$$\frac{\sin i_h}{v_h} = \frac{\sin 90^\circ}{v_m} \rightarrow v_m = \frac{v_h}{\sin i_h}$$

$$\therefore v_m = \frac{4.8}{\sin(30^\circ)} = 9.6 \text{ km/s}$$



Utilizando o resultado acima, podemos estimar a profundidade do ponto supracitado,

$$v_m = 9.6 = 3.6 + 0.1 \times r \rightarrow r = 60 \text{ km}$$

Como na parte (a), os raios sísmicos são circulares com raio R tal que

$$R = r + \frac{v_0}{k} = 60 + \frac{3.6}{0.1} = 96 \text{ km}$$

e a distância epicentral x (ponto E até S) é dada por $x = a + b$, onde

$$a = \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2} = \sqrt{96^2 - \left(\frac{3.6}{0.1} + 12\right)^2} = 83.1 \text{ km}$$

$$b = \sqrt{96^2 - \left(\frac{3.6}{0.1}\right)^2} = 89.0 \text{ km}$$

de modo que

$$x = a + b = 83.1 + 89.0 = \boxed{172 \text{ km}}$$

Digressão: A parte (b) fornece-nos a oportunidade de testar a expressão obtida na parte (a). Substituindo $v_0 = 3.6$ km/s, $k = 0.1$, $h = 12$ km e $x = 172$ km na referida expressão, vem

$$\sin i_h = \frac{v_0 + kh}{v_0 + k \left\{ \sqrt{\left[\frac{x^2 - h^2 - 2(v_0/k)h}{2x} \right]^2} + \left(\frac{v_0}{k} + h \right)^2 - \frac{v_0}{k} \right\}}$$

$$\therefore \sin i_h = \frac{3.6 + 0.1 \times 12}{3.6 + 0.1 \times \left\{ \sqrt{\left[\frac{172^2 - 12^2 - 2 \times (3.6/0.1) \times 12}{2 \times 172} \right]^2} + \left(\frac{3.6}{0.1} + 12 \right)^2 - \frac{3.6}{0.1} \right\}}$$

$$\therefore \sin i_h = 0.500$$

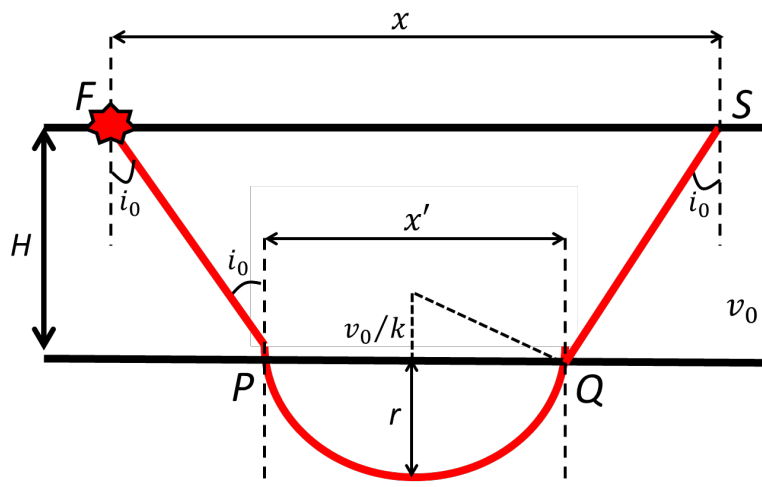
$$\therefore i_h = \arcsin(0.500) = 30^\circ$$

Como esperado, o resultado acima coincide com o ângulo de disparo i_h com o qual trabalhamos na parte (b). Logo, a fórmula da parte (a) é válida.

■ Prob. 22

Parte (a): Como mostrou o problema anterior, pode-se prontamente inferir que os raios em um meio no qual a velocidade é linearmente proporcional à profundidade têm forma circular. O segmento de raio R é dado por $R = v_0/k + r$, onde r é a profundidade de penetração máxima (vide figura a seguir). O tempo de trajetória de um raio que se refrata do primeiro para o segundo meio é dado por

$$t = \frac{2\overline{FP}}{v_0} + \frac{2}{k} \sinh^{-1} \left(\frac{kx'}{2v_0} \right)$$



Como mostra a figura, o caminho traçado pelo raio tem forma linear no meio superior e forma de arco circular no meio inferior. A distância epicentral x é

$$x = x' + 2H \tan i_0$$

O comprimento do segmento horizontal \overline{FP} é

$$\overline{FP} = \frac{H}{\cos i_0}$$

de modo que, substituindo na expressão para t ,

$$t = \frac{2\overline{FP}}{v_0} + \frac{2}{k} \sinh^{-1} \left(\frac{kx'}{2v_0} \right) = \frac{2H}{v_0 \cos i_0} + \frac{2}{k} \sinh^{-1} \left(\frac{kx'}{2v_0} \right) \quad (\text{I})$$

Aplicando a lei de Snell na interface entre o meio superior e o meio inferior,

$$\frac{\sin i_0}{v_0} = \frac{1}{v_0 + kr} \rightarrow v_m = v_0 + kr = \frac{v_0}{\sin i_0}$$

onde r é a profundidade máxima atingida pelo raio na camada inferior e v_m é a velocidade sísmica naquela profundidade. Recorrendo à ilustração precedente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter

$$\begin{aligned} \left(\frac{x'}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{k} \right)^2 &= \left(\frac{v_0}{k} + r \right)^2 \\ \therefore \left(\frac{x'}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{k} \right)^2 &= \left(\frac{v_0 + kr}{k} \right)^2 \\ \therefore \left(\frac{x'}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{k} \right)^2 &= \left(\frac{v_m}{k} \right)^2 \\ \therefore \left(\frac{x'}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{k} \right)^2 &= \frac{v_0^2}{k^2 \sin^2 i_0} \\ \therefore \frac{x'^2}{4} + \frac{v_0^2}{k^2} &= \frac{v_0^2}{k^2 \sin^2 i_0} \\ \therefore \frac{x'^2}{4} &= \frac{v_0^2}{k^2 \sin^2 i_0} - \frac{v_0^2}{k^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x'^2}{4} = \frac{v_0^2}{k^2} \left(\frac{1}{\sin^2 i_0} - 1 \right)$$

$$\therefore \frac{x'^2}{4} = \frac{v_0^2}{k^2} \left(\frac{1 - \sin^2 i_0}{\sin^2 i_0} \right)$$

$$\therefore \frac{x'^2}{4} = \frac{v_0^2}{k^2} \left(\frac{\cos^2 i_0}{\sin^2 i_0} \right)$$

$$\therefore \frac{x'^2}{4} = \frac{v_0^2}{k^2} \cot^2 i_0$$

$$\therefore x' = \sqrt{\frac{4v_0^2}{k^2} \cot^2 i_0}$$

$$\therefore x' = \frac{2v_0}{k} \cot i_0$$

Portanto, a distância epicentral x torna-se

$$x = x' + 2H \tan i_0 = \boxed{\frac{2v_0}{k} \cot i_0 + 2H \tan i_0} \quad \text{(II)}$$

Por fim, substituímos $kx'/2v_0$ na equação (I),

$$t = \frac{2H}{v_0 \cos i_0} + \frac{2}{k} \sinh^{-1} \left(\frac{kx'}{2v_0} \right) = \boxed{\frac{2H}{v_0 \cos i_0} + \frac{2}{k} \sinh^{-1} (\cot i_0)}$$

Parte (b): Tudo o que devemos fazer aqui é substituir os valores numéricos fornecidos na equação (II),

$$x = \frac{2v_0}{k} \cot i_0 + 2H \tan i_0 \rightarrow 125 = \frac{2 \times 5}{0.15} \times \cot i_0 + 2 \times 10 \times \tan i_0$$

$$\therefore 125 = 66.67 \times \cot i_0 + 20 \times \tan i_0$$

$$\therefore 66.67 \cot i_0 + 20 \tan i_0 - 125 = 0$$

Podemos resolver essa equação trigonométrica utilizando o comando *Solve* do Mathematica,

In[323]= Solve[66.67 * Cot[I0] + 20 * Tan[I0] - 125 == 0, I0]

⋯ Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; information.

Out[323]= {{I0 -> 0.532171}, {I0 -> 1.39596}}

As soluções são $i_0 = 0.532 \text{ rad} = 30.5^\circ$ e $i_0 = 1.40 \text{ rad} = 80.2^\circ$. Qualquer um dos dois resultados implicaria trajetórias de propagação com distância epicentral igual a 125 km.

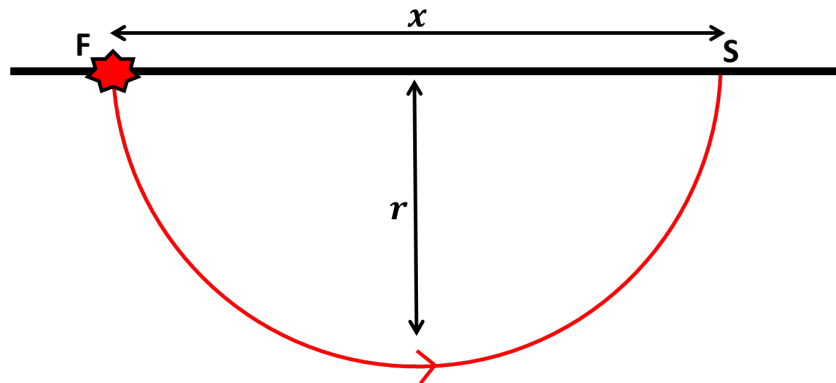
■ Prob. 23

Se r é a profundidade máxima alcançada por um raio com parâmetro de raio p , a distância epicentral x é dada por

$$x = \int_0^r \frac{pvdz}{\sqrt{1-p^2v^2}} = \int_0^r \frac{pv_0 e^{\alpha z} dz}{\sqrt{1-p^2v_0^2 e^{2\alpha z}}}$$

Avaliando a integral à direita,

$$x = \frac{2}{\alpha} \left[\arcsin(pv_0 e^{\alpha z}) \right]_{r=0}^r = \frac{2}{\alpha} \left[\arcsin(pv_0 e^{\alpha r}) - \arcsin(pv_0) \right]$$



Conhecendo o parâmetro de raio $p = 1/(v_0 e^{\alpha r})$, o primeiro termo no lado direito é $\arcsin(1) = \pi/2$; portanto,

$$x = \frac{2}{\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(pv_0) \right]$$

Resolvendo para p ,

$$x = \frac{2}{\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(pv_0) \right] \rightarrow \frac{\alpha x}{2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin(pv_0)$$

$$\therefore \arcsin(pv_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha x}{2}$$

$$\therefore \sin[\arcsin(pv_0)] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha x}{2}\right)$$

$$\therefore pv_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha x}{2}\right)$$

$$\therefore pv_0 = \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$$

$$\therefore p = \frac{1}{v_0} \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$$

Em seguida, determinamos o tempo de trajetória,

$$t = \int_0^x p dx = \frac{1}{v_0} \int_0^x \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right) dx = \frac{2}{\alpha v_0} \sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$$

Para estabelecer a profundidade máxima de penetração r de um raio cobrindo uma distância x , igualamos a expressão para p obtida acima a $p = 1/v_0 e^{\alpha r}$ e manipulamos,

$$p = \frac{1}{v_0 e^{\alpha r}} = \frac{1}{v_0} \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{e^{\alpha r}} = \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{\cos(\alpha x/2)} = e^{\alpha r}$$

$$\therefore \sec\left(\frac{\alpha x}{2}\right) = e^{\alpha r}$$

$$\therefore \ln\left[\sec\left(\frac{\alpha x}{2}\right)\right] = \alpha r$$

$$\therefore r = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\sec\left(\frac{\alpha x}{2}\right)\right]$$

■ Prob. 24

Parte (a): Simples! O convidado não dispõe de estimativas da distância entre sua posição e o foco do terremoto.

Parte (b): Primeiramente, devemos estimar o momento sísmico. Para tanto, estimamos a área A da falha,

$$A = 30 \times (2\pi r) = 30 \times (2\pi \times 6371) = 1.2 \times 10^6 \text{ km}^2 = 1.2 \times 10^{12} \text{ m}^2$$

O módulo de cisalhamento é dado por $\mu = \rho\beta^2$. Recorrendo ao modelo PREM para um intervalo de profundidade de 0 a 30 km, lê-se $\beta \approx 3.5 \text{ km/s} = 3500 \text{ m/s}$. Por conveniência, tomamos $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$. O valor de μ é então

$$\mu = \rho\beta^2 = 2700 \times 3500^2 = 3.31 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

Em seguida, calculamos o momento M_0 ,

$$M_0 = \mu AD = (3.31 \times 10^{10}) \times (1.2 \times 10^{12}) \times 20 = 7.94 \times 10^{23} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por fim, a magnitude de momento é

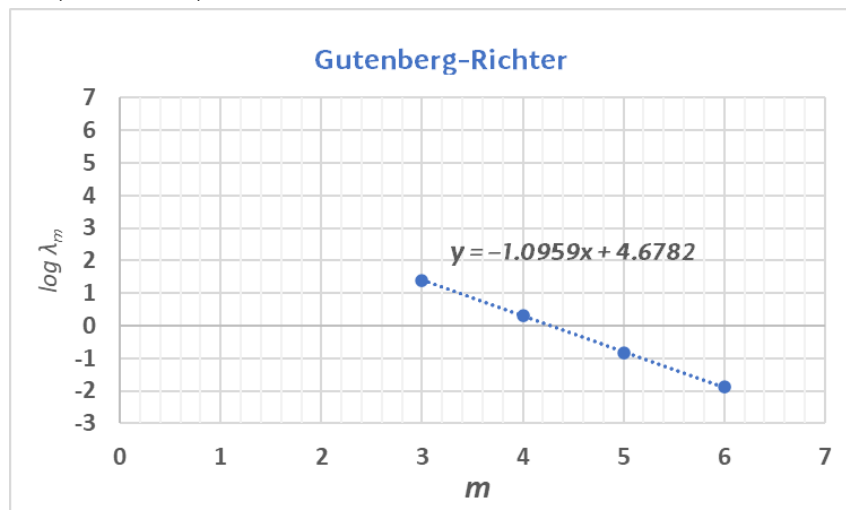
$$M_w = \frac{2}{3}(\log_{10} M_0 - 9.1) = \frac{2}{3} \left[\log_{10} (7.94 \times 10^{23}) - 9.1 \right] = \boxed{9.87}$$

■ Prob. 25

Parte (a): Os cálculos de taxas anuais para diferentes intervalos de magnitude estão listados a seguir. (A planilha está no arquivo [Cálculos Geofísica – Hoek.xlsx](#)).

$M_w > X$	N_m	λ_m	$\log_{10} \lambda_m$
$M_w > 3$	1962	$1962/80 = 24.53$	1.390
$M_w > 4$	162	2.03	0.307
$M_w > 5$	12	0.15	-0.824
$M_w > 6$	1	0.013	-1.886

Em seguida, plotamos os logaritmos decimais das taxas (coluna vermelha) *versus* as magnitudes (coluna azul).



Como mostra a figura, o ajuste de reta resulta na seguinte lei de Gutenberg-Richter,

$$\log \lambda_m = 4.678 - 1.096m$$

Parte (b): No presente caso, escrevemos

$$P[5.5 \leq m \leq 6.5 | m > m_o] = P[m \leq 6.5 | m > m_o] - P[m \leq 5.5 | m > m_o]$$

Lembre-se que, em notação de probabilidades condicionais, a expressão à direita de “|” denota um evento satisfeito *a priori*. Com $m_o = 3$, tem-se

$$\begin{aligned} P[5.5 \leq m \leq 6.5 | m > 3] &= P[m \leq 6.5 | m > 3] - P[m \leq 5.5 | m > 3] \\ \therefore P[5.5 \leq m \leq 6.5 | m > 3] &= \left[1 - e^{-2.303 \times 1.096 \times (6.5 - 3)} \right] - \left[1 - e^{-2.303 \times 1.096 \times (5.5 - 3)} \right] \\ \therefore P[5.5 \leq m \leq 6.5 | m > 3] &= 0.9999 - 0.9982 = 0.0017 = \boxed{0.17\%} \end{aligned}$$

Parte (c): Notando que $b = 1.096$ conforme obtido no ajuste de reta da parte (a), tem-se

$$\begin{aligned} P[M < m | m_o \leq m \leq m_{\max}] &= \frac{1 - \exp[(-2.303)b(m - m_o)]}{1 - \exp[(-2.303)b(m_{\max} - m_o)]} \\ \therefore P[5.5 \leq m < 6.5 | 3 \leq m \leq 6.5] &= \frac{1 - \exp[(-2.303) \times 1.096 \times (6.5 - 3)]}{\underbrace{1 - \exp[(-2.303) \times 1.096 \times (6.5 - 3)]}_{=1}} - \frac{1 - \exp[(-2.303) \times 1.096 \times (5.5 - 3)]}{1 - \exp[(-2.303) \times 1.096 \times (6.5 - 3)]} \\ \therefore P[5.5 \leq m < 6.5 | 3 \leq m \leq 6.5] &= 1 - 0.9983 = 0.0017 = \boxed{0.17\%} \end{aligned}$$

Note que os resultados das partes (b) e (c) são idênticos.

■ Prob. 26

Parte (a): Supondo que os eventos (no caso, terremotos) são independentes e suficientemente raros, é plausível que a ocorrência de terremotos pode ser descrita por um processo de Poisson. Assim sendo, a probabilidade de que observar-se-á *ao menos* um terremoto com magnitude 7 no decurso de 10 anos é dada por

$$\begin{aligned} P[N = n] &= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ \therefore P[N \geq 1] &= 1 - P[N = 0] = 1 - e^{-\lambda_m t} \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

onde

$$\lambda_m = 10^{4.0 - 0.7M} = 10^{4.0 - 0.7 \times 7} = 0.1259$$

Para $t = 10$ anos, tem-se, substituindo em (I),

$$P_{10}[N \geq 1] = 1 - e^{-0.1259 \times 10} \approx 0.7161 = \boxed{71.6\%}$$

Há uma probabilidade aproximadamente igual a 71.6% de que ao menos um terremoto de magnitude maior que 7 será registrado em um intervalo de 10 anos. Prosseguindo de maneira análoga para $t = 50$ e $t = 250$,

$$P_{50}[N \geq 1] = 1 - e^{-0.1259 \times 50} \approx 0.9982 = \boxed{99.82\%}$$

$$P_{250}[N \geq 1] = 1 - e^{-0.1259 \times 250} \approx 1.0000 = \boxed{100\%}$$

Parte (b): Com $n = 1$, reescrevemos a distribuição de Poisson como

$$P[N = n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \rightarrow P[N = 1] = \frac{(\lambda t)^1 e^{-\lambda t}}{1!} = \lambda_m t e^{-\lambda_m t}$$

Portanto, para $t = 10$ anos, tem-se

$$P_{10}[N = 1] = 0.1259 \times 10 \times e^{-0.1259 \times 10} \approx 0.3575 = \boxed{35.75\%}$$

Há uma probabilidade aproximadamente igual a 35.8% de que exatamente um terremoto de magnitude maior que 7 será registrado em um intervalo de 10 anos. Prosseguindo de maneira análoga para $t = 50$ e $t = 250$,

$$P_{50}[N = 1] = 0.1259 \times 50 \times e^{-0.1259 \times 50} \approx 0.0116 = \boxed{1.16\%}$$

$$P_{250}[N = 1] = 0.1259 \times 250 \times e^{-0.1259 \times 250} \approx 6.7383 \times 10^{-13} \approx \boxed{0\%}$$

Parte (c): Conforme estabelecido na equação **(I)** da parte (a),

$$p = P[N \geq 1] = 1 - e^{-\lambda_m t}$$

Resolvendo para λ_m e substituindo $p = 0.1$, $t = 50$ anos,

$$p = 1 - e^{-\lambda_m t} \rightarrow \lambda_m = \frac{-\ln(1-p)}{t}$$

$$\therefore \lambda_m = \frac{-\ln(1-0.1)}{50} = 0.00211 \text{ ano}^{-1}$$

Substituindo na lei de Gutenberg-Richter fornecida no enunciado,

$$\log_{10}(0.00211) = 4.0 - 0.7M$$

$$M = \frac{4.0 - \log_{10}(0.00211)}{0.7} = \boxed{9.54}$$

Há uma probabilidade de 10% de que um terremoto de magnitude 9.54 ou mais ocorrerá na região ao longo de um período de 50 anos.

■ **Prob. 27**

Parte (a): A taxa de réplicas prevista pelo modelo de Omori é dada por

$$n(t) = \frac{K}{t+c}$$

Integrando, o número de réplicas N ao fim de um tempo T torna-se

$$\begin{aligned} N &= \int_0^T n(t) dt = \int_0^T \frac{K}{t+c} dt \\ \therefore N &= K \ln(t+c) \Big|_{t=0}^T \\ \therefore N &= K \ln(T+c) - K \ln c \end{aligned}$$

É fácil verificar que, para T tendendo a ∞ , o logaritmo no primeiro termo do lado direito também tenderá ao infinito; isso significa que o modelo de Omori prevê um número infinito de réplicas quando $t \rightarrow \infty$.

Parte (b): Aqui, buscamos o tempo T^* tal que

$$\begin{aligned} N(1000) &= 2N(T^*) \\ \therefore K \ln(1000+c) - K \ln c &= 2 \left[K \ln(T^*+c) - K \ln c \right] \\ \therefore \cancel{K} \ln(1000+c) - \cancel{K} \ln c &= 2 \cancel{K} \ln(T^*+c) - 2 \cancel{K} \ln c \\ \therefore 2 \ln(T^*+c) &= \ln(1000+c) + \ln c \\ \therefore \ln(T^*+c) &= \frac{\ln(1000+c) + \ln c}{2} \\ \therefore T^* &= \exp \left[\frac{\ln(1000+c) + \ln c}{2} \right] - c \quad \text{(I)} \\ \therefore T^* &= \exp \left[\frac{\ln(1000+1) + \ln 1}{2} \right] - 1 = \boxed{30.64 \text{ dias}} \end{aligned}$$

Portanto, para $c = 1$ dia, metade das réplicas observadas em 1000 dias ocorrerão nos primeiros 30.6 dias.

Parte (c): Sendo $c = 10 \text{ min} = 10/1440 \text{ dias} = 0.006944 \text{ dias}$, substituímos na equação **(I)** da parte anterior para obter

$$\begin{aligned} T^* &= \exp \left[\frac{\ln(1000+c) + \ln c}{2} \right] - c = \exp \left[\frac{\ln(1000+0.006944) + \ln(0.006944)}{2} \right] - 0.006944 \\ \therefore T^* &= \boxed{2.63 \text{ dias}} \end{aligned}$$

Portanto, para $c = 10$ min, metade dos choques observados em 1000 dias ocorrerão nos primeiros 2.63 dias.

■ Prob. 28

Sendo $b = 1.0$, podemos escrever a lei de Gutenberg-Richter como

$$N(\geq m) = 10^{a-bm} = 10^{a-m} = 10^a 10^{-m}$$

onde m é a magnitude. Se a maior réplica teve $m = 5.5$ (uma unidade a menos que 6.5), espera-se que as réplicas serão maiores que esse valor em aproximadamente 50% das observações; utilizamos essa informação para estimar o coeficiente a ,

$$N(\geq m) = 10^a 10^{-m} \rightarrow N(\geq 5.5) = 0.5 = 10^a 10^{-5.5}$$

$$\therefore 10^a = \frac{0.5}{10^{-5.5}}$$

$$\therefore a = \log_{10} \left(\frac{0.5}{10^{-5.5}} \right) \approx 5.20$$

Em seguida,

$$N(\geq 1.5) = 10^{5.20-1.5} = \boxed{5012}$$

Espera-se que ocorrerão cerca de 5000 réplicas com magnitude igual a ou maior que 1.5.

■ Referências (★ → Livro altamente recomendado)

● (Alguns livros foram consultados apenas na elaboração da parte 2.)

1. Buforn, E. P., Pro, C., & Udías, A. (2012). *Solved Problems in Geophysics*: Cambridge University Press. ★
2. Burger, H. R., Sheehan, A. F., & Jones, C. H. (2006). *Introduction to Applied Geophysics*: W.W. Norton and Company.
3. Fowler, C. M. R. (2004). *The Solid Earth – An Introduction to Global Geophysics* (2 ed.): Cambridge University Press.
4. Howard, T. (2014). *Space Weather and Coronal Mass Ejections*: Springer.
5. Kelley, M. C. (2009). *The Earth's Ionosphere: Plasma Physics and Electrodynamics* (Vol. 96): Academic Press.
6. Lowrie, W., & Fichtner, A. (2020). *Fundamentals of Geophysics* (3 ed.): Cambridge University Press. ★
7. Philpotts, A. R., & Ague, J. J. (2022). *Principles of Igneous and Metamorphic Petrology*: Cambridge University Press.
8. Russell, C. T., Luhmann, J. G., & Strangeway, R. J. (2016). *Space Physics – An Introduction*: Cambridge University Press.
9. Ryden, B., & Peterson, B. M. (2010). *Foundations of Astrophysics*: Addison-Wesley.
10. Shearer, P. M. (2009). *Introduction to Seismology* (2 ed.): Cambridge University Press. ★
11. Stacey, F. D., & Davis, P. M. (2008). *Physics of the Earth* (4 ed.): Cambridge University Press.

➔ Referências de cada problema

Problema	Ref.	Problema	Ref.
1	[9]	15	[10]
2	[3]	16	[10]
3	[3]	17	[6]
4	[2]	18	[1]
5	[2]	19	[1]
6	[2]	20	[1]
7	[6]	21	[1]
8	[11]	22	[1]
9	[6]	23	[1]
10	[6]	24	[6]
11	[6]	25	-
12	-	26	-
13	[10]	27	[10]
14	[6]	28	[10]

■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

WhatsApp: (61) 981247059

Email: lucas_0150@hotmail.com

