



Lista de Exercícios Resolvidos 11

Geofísica

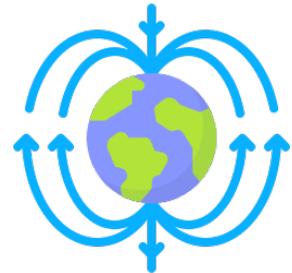
Parte 2: Calor e Eletromagnetismo

Lucas Monteiro Nogueira

■ Problemas

Parte 1: Gravidade e Sismologia

1. Momento de Inércia da Terra
2. Gravidade I: Anomalia Gravitacional Esférica
3. Gravidade II: Anomalia Gravitacional Cilíndrica
4. Gravidade III: Poço Vertical
5. Gravidade IV: Anomalia Detectável I
6. Gravidade V: Anomalia Detectável II
7. Gravidade VI: Método de Nettleton
8. Gravidade VII: Métodos Gravitacionais – Revisão
9. Equilíbrio Isostático I
10. Equilíbrio Isostático II
11. Equilíbrio Isostático III
12. *Checklist Rápido 1*
13. Sismologia I: Interpretando um Sismograma
14. Sismologia II: Estimando o Horário de um Terremoto
15. Sismologia III: Parâmetros Constitutivos
16. Sismologia IV: Velocidades de Onda
17. Sismologia V: Plotando Tempos de Chegada
18. Raios Sísmicos I
19. Raios Sísmicos II
20. Raios Sísmicos III
21. Raios Sísmicos IV
22. Raios Sísmicos V
23. Raios Sísmicos VI



- 24. Magnitude Sísmica I
 - 25. Magnitude Sísmica II
 - 26. Magnitude Sísmica III
 - 27. Magnitude Sísmica IV: Réplicas I
 - 28. Magnitude Sísmica V: Réplicas II
-

Parte 2: Calor e Eletromagnetismo

- 29. Análise de Calor: Derretimento de uma Lagoa
- 30. Calor na Litosfera I: Fluxo de Calor na Litosfera Oceânica
- 31. Calor na Litosfera II: Calor Gerado e Manto
- 32. Calor na Litosfera III: Ondas Térmicas
- 33. Escoamento de Magma I
- 34. Escoamento de Magma II
- 35. *Checklist Rápido 2*
- 36. Campos Magnéticos I
- 37. Campos Magnéticos II
- 38. Campos Magnéticos III
- 39. Campos Magnéticos IV
- 40. Campos Magnéticos V
- 41. Geomagnetismo I
- 42. Geomagnetismo II
- 43. Geomagnetismo III
- 44. Geomagnetismo IV
- 45. Geomagnetismo V
- 46. Massa da Atmosfera Terrestre
- 47. Ionosfera I
- 48. Ionosfera II
- 49. Ionosfera III
- 50. Ionosfera IV
- 51. Ionosfera V
- 52. Ionosfera VI

■ **Problema 29 (Análise de Calor: Derretimento de uma Lagoa)**

Uma lagoa circular de 180 m de diâmetro é congelada em uma noite extremamente fria. A lagoa está em uma região geotérmica na qual a temperatura a 200 m de profundidade é 30°C maior que a temperatura superficial. A condutividade térmica na rocha subjacente ao lago é 3.8 W/m·K e o calor latente de fusão do gelo é 334 kJ/kg. Desprezando outras fontes de calor, calcule a massa de gelo derretida por hora devido ao gradiente geotérmico.

■ **Problema 30 (Calor na Litosfera I: Fluxo de Calor na Litosfera Oceânica)**

Um gradiente térmico de 35°C/km é medido na porção superior dos sedimentos do assoalho oceânico. Se a condutividade térmica média dos sedimentos é 1.75 W/m·K, calcule o fluxo de calor local. Qual é a distância entre a região em estudo e a dorsal oceânica ativa mais próxima?

Dica: Conforme discutido em Lowrie (2020), o decaimento do fluxo de calor q (MW/m²) com a idade t (Ma) da crosta oceânica sob arrefecimento é descrito pelo modelo GDH1, cujas equações básicas são

$$\begin{cases} q = \frac{510}{\sqrt{t}} & ; t \leq 55 \text{ Ma} \\ q \approx 48 + 96 \exp(-0.0278t) & ; t > 55 \text{ Ma} \end{cases}$$

■ **Problema 31 (Calor na Litosfera II: Calor Gerado e Manto)**

(a) Suponha que a crosta terrestre tem espessura $H = 32$ km e o fluxo de calor na sua superfície é 64 MW/m². Se todo o calor é gerado na própria crosta, qual é a taxa de produção de calor por unidade de volume? Utilize $k = 3$ W/m·K como a condutividade térmica do material crustal.

(b) Se todo o calor interno é gerado no manto com distribuição $\varepsilon = Ae^{-z/H}$ Mw/m³, onde z é a profundidade medida a partir da superfície crustal, qual é o valor absoluto do coeficiente A ? Qual é a temperatura a 100 km de profundidade?

■ **Problema 32 (Calor na Litosfera III: Ondas Térmicas)**

Consideramos um modelo simplificado no qual a litosfera oceânica é tratada como um meio espaço sob arrefecimento difusivo. Supondo que as propriedades termofísicas e a temperatura inicial são uniformes e, ademais, que não há fontes internas de calor, pode-se escrever a equação diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{(I)}$$

onde T é a temperatura, z é a distância a partir da superfície e η é a difusividade térmica, a qual é dada por

$$\eta = \frac{\kappa}{\rho C_p}$$

onde κ é a condutividade térmica da massa litosférica, ρ é a sua densidade e C_p é o calor específico. Se consideramos uma variação de temperatura superficial dada por $T_0 \sin \omega t$, onde T_0 é a temperatura superficial inicial, ω é a frequência angular da oscilação térmica e t é o tempo, podemos descrever a propagação em profundidade como uma combinação de atenuação e atraso de fase,

$$T(t, z) = T_0 \exp(-\alpha z) \sin(\omega t - \beta z) \quad \text{(II)}$$

Escrevendo as derivadas com relação a t e z e substituindo na equação (I), encontramos as constantes

$$\alpha = \beta = \left(\frac{\omega}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

de modo que, substituindo em (II),

$$T(t, z) = T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right) \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right) \quad \text{(III)}$$

(a) Use derivadas e substituição para mostrar que (II) satisfaz a equação diferencial (I).

(b) Se a oscilação térmica anual pico-a-pico na superfície é igual a 30 K por ano e a difusividade térmica das rochas superficiais é de $1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, a que profundidade na crosta deve-se inserir um instrumento para que este registre uma oscilação anual de temperatura pico-a-pico igual a 0.001 K?

(c) Mostre que, a uma profundidade z , a onda térmica em estudo possui um gradiente oscilatório com amplitude

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{\omega}{\eta}} T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right)$$

(d) Mostre que a diferença de temperatura na metade inferior de um poço artesiano de profundidade z devido à penetração da onda térmica em foco oscila com amplitude $f \times T_0$, onde f é um fator dado por

$$f = \sqrt{e^{-x} \left[e^{-x} + 1 - 2e^{-x/2} \cos \frac{x}{2} \right]}$$

e x é uma coordenada adimensional definida como

$$x = \frac{z}{z^*} = \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z$$

sendo $z^* = \sqrt{2\eta/\omega}$ a profundidade de penetração efetiva (*skin depth*) da onda.

Mostre que f tem valor máximo de 0.347, que ocorre quando $x = 1.335$. Se $z = 1000$ m e $\eta = 1.26 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, qual é o período correspondente da onda térmica?

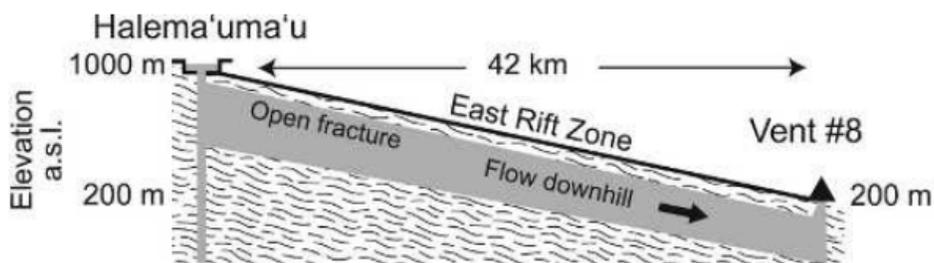
■ Problema 33 (Escoamento de Magma I)

Uma erupção fissural basáltica ocorreu no Lago Lakagigar, Islândia, em 1783. Entre 9 de Junho e 29 de Junho daquele ano, um volume de 9.5 km^3 de magma foi extravasado de uma fissura de 10 km de comprimento e largura estimada de 4 m. Para tais informações, qual era a velocidade do magma no dique alimentador? O escoamento de magma era turbulento ou laminar? Utilize $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$ e $\eta = 300 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ como a densidade e viscosidade média do magma basáltico, respectivamente.

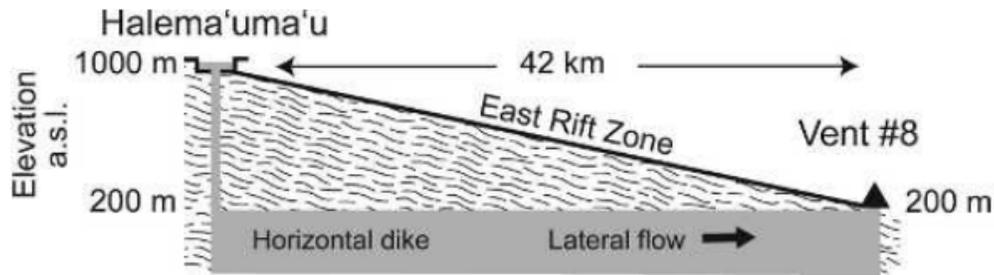
■ Problema 34 (Escoamento de Magma II)

Em 2018, a drenagem do lago de lava Halema'uma'u, Havaí, a uma elevação de 1000 m acima do nível do mar e a quase simultânea erupção na *Lower East Rift Zone* (LERZ) do vulcão Kilauea à altitude de 200 m sugeriu que as duas estruturas podem ter sido conectadas através de um sistema de armazenamento magmático. Nas partes (a) e (b), consideramos dois modelos para tal sistema. Em ambas as partes, utilizamos 2600 kg/m^3 como a densidade do magma.

(a) Inicialmente, consideramos a LERZ como uma fratura aberta na qual ocorre um escoamento de magma ao longo de 42 km de distância entre o lago Halema'uma'u e a abertura vulcânica #8 na LERZ. Calcule o gradiente de pressão lateral que faz o magma escoar entre o Halema'uma'u e a abertura vulcânica em questão.



(b) No segundo modelo, supõe-se que a conexão mencionada no enunciado é atribuída a um dique que, a partir de uma altitude de 200 m, se estende horizontalmente ao longo de 42 km até a abertura #8, como mostra a figura na página a seguir. Primeiramente, calcule a pressão na coluna de magma à altitude de 200 m acima do nível do mar. Pode-se desprezar a pressão atmosférica, pois esta será aproximadamente a mesma entre o lago e a abertura #8. Em seguida, supondo que a pressão na abertura #8 é igual a zero, calcule o gradiente de pressão lateral que faz o magma escoar no dique, supondo que não há fontes de pressão além do peso do magma entre o lago e a abertura #8.



(c) Tendo em vista suas respostas nas partes (a) e (b), o que podemos inferir sobre o gradiente de pressão provocando a erupção da abertura #8?

(d) Erosões iniciaram-se em diversas fissuras no Kilauea em maio de 2018. Em julho, a abertura #8 tornou-se a principal fonte de lava, extravasando cerca de $100 \text{ m}^3/\text{s}$. Supondo que o alimentador dessa abertura era aproximadamente cilíndrico, qual deve ter sido seu diâmetro para suprir a referida vazão magmática? A viscosidade dinâmica da magma é $\mu = 300 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.



■ Checklist Rápido 2

■ **35.1.** () Para um meio sólido homogêneo no qual a lei de Fourier é válida, o fluxo de condução de calor é dado pelo produto entre difusividade térmica e gradiente térmico.

■ **35.2.** () Suponha que o manto terrestre é constituído por uma casca esférica com raio interno 3480 km e raio externo 6361 km . Sabe-se que a taxa volumétrica de produção de calor no manto é suposta igual a $1.5 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$. Utilizando tais dados, conclui-se que a potência térmica dissipada no manto é maior que 16 TW . ($1 \text{ TW} = 10^{12} \text{ W}$).

■ **35.3.** A *razão de Koenigsberger* é definida como

A) A anisotropia da suscetibilidade magnética.

B) A razão entre magnetizações remanente e induzida.

C) A razão entre as resistividades elétricas longitudinal e transversa.

D) A razão entre as velocidades de ondas P e S .

■ **35.4.** () O médico inglês William Gilbert, autor da obra *De Magnete*, é considerado um dos fundadores do geomagnetismo moderno. Além da publicação do referido volume, Gilbert presenteou a comunidade científica com a elaboração do primeiro mapa magnético do Atlântico norte, produzido após expedições marítimas lideradas por ele no fim do século XVII.

■ **35.5.** () A constante dielétrica do basalto é aproximadamente igual a 12. Assim sendo, podemos afirmar que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética em um estrato basáltico homogêneo é maior que $0.08 \text{ m}\cdot\text{ns}^{-1}$.

■ **35.6.()** A profundidade de penetração de uma onda eletromagnética com frequência linear $f = 1$ kHz em uma rocha granítica de resistividade $\rho = 5 \text{ k}\Omega \cdot \text{m}$ é maior que 1000 m.

■ **35.7.()** Em materiais magnéticos, a relação entre a permeabilidade magnética μ e a suscetibilidade K , supondo que ambas têm as unidades apropriadas no sistema SI, é $\mu = 1 - K$.

■ **35.8. (GATE 2019)** Na definição de um dipolo magnético axial geocêntrico com harmônicos esféricos, os três primeiros coeficientes gaussianos não-nulos para $n = 1$ são:

A) g_0^0, g_1^0, h_1^0

B) g_1^0, g_1^1, h_1^1

C) g_1^0, g_1^1, h_1^0

D) g_1^0, g_1^1, h_0^0

■ **35.9.()** Os harmônicos esféricos utilizados nas soluções da equação de Laplace para potenciais geomagnéticos são as chamadas *funções quase-ortogonais de Schmidt*. O estudante que desconhece tais fórmulas não precisa se preocupar, pois as funções em questão são semelhantes às funções zonais de Legendre utilizadas em outras aplicações da teoria de potenciais. De fato, com exceção da terminologia distinta, as funções de Schmidt são idênticas às funções zonais de Legendre de mesmo grau e ordem.

■ **35.10.()** Variações abruptas na segunda derivada temporal, ou aceleração secular, do campo magnético oriundo do interior da Terra são conhecidas como *arrancadas geomagnéticas*. O primeiro tal evento registrado experimentalmente ocorreu em 1969 e durou cerca de 2 anos. Posteriormente, determinou-se que 'arrancadas' ocorreram também em 1925, 1978, 1991, 1999 e possivelmente em 1901 e 1913. Uma melhor compreensão de tal fenômeno é essencial para estudiosos de geofísica intranuclear e para as ciências da Terra em geral. É certo que tais eventos guardam relação com fenômenos intranucleares como advecção e cisalhamento; por outro lado, devido à curta duração das arrancadas, contribuições oriundas de difusão mássica no núcleo provavelmente não são relevantes.

■ **35.11.** Tempestades geomagnéticas severas podem ocorrer quando plasmas oriundos de ejeções de massa coronal reconectam com a magnetosfera terrestre. Qual das alternativas a seguir **não** é uma consequência de tais tempestades?

A) Perturbações no campo geomagnético, geralmente manifestadas sob a forma de flutuações de magnitude e orientação.

B) Aumento na população de partículas energéticas na magnetosfera terrestre.

C) Encolhimento da plasmasfera.

D) Enfraquecimento da corrente anelar e dos cinturões de radiação.

■ Problema 36 (Campos Magnéticos I)

O campo de referência IGRF 2015 fornece os seguintes coeficientes gaussianos para o dipolo geomagnético:

$$\rightarrow g_1^0 = -29,442 \text{ nT}$$

$$\rightarrow g_1^1 = -1501 \text{ nT}$$

$$\rightarrow h_1^1 = +4797 \text{ nT}$$

(a) Mostre que o momento de dipolo magnético da Terra é aproximadamente igual a $7.724 \times 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$.

(b) Calcule as localizações dos polos geomagnéticos.

■ Problema 37 (Campos Magnéticos II)

Supondo um dipolo axial com momento magnético $7.724 \times 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$, calcule a variação do campo total em função da latitude para 30°N .

■ Problema 38 (Campos Magnéticos III)

Mostre que, para um pequeno deslocamento ao longo de um meridiano com longitude magnética em latitude magnética 45°N , a variação de inclinação é exatamente igual a $4/5$ vezes a variação de latitude.

■ Problema 39 (Campos Magnéticos IV)

Calcule a inclinação e declinação do campo magnético observadas em Boulder, Colorado, EUA (40°N , 105°W), supondo que o campo magnético da Terra pode ser representado por um dipolo geocêntrico perfeito cujo eixo penetra a superfície da Terra em 80°N , 72°W .

■ Problema 40 (Campos Magnéticos V)

Medidas dos elementos de campo magnético em um observatório forneceram os seguintes resultados:

$$\rightarrow \text{Componente } N = 27,200 \text{ nT}$$

$$\rightarrow \text{Componente } E = -1800 \text{ nT}$$

$$\rightarrow \text{Componente } V = -40,100 \text{ nT}$$

(a) O observatório está no hemisfério norte ou sul?

(b) Qual é a intensidade total do campo em questão?

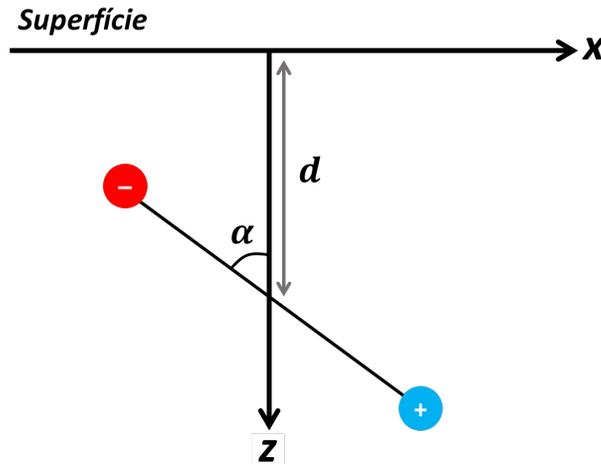
(c) Quais são os valores de inclinação e declinação do campo?

■ Problema 41 (Geomagnetismo I)

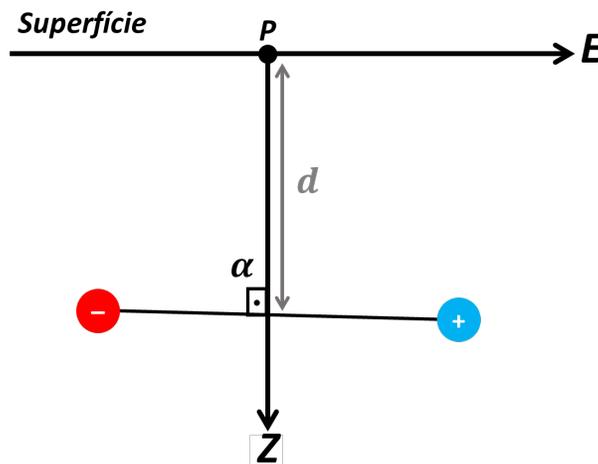
Suponha que o campo geomagnético é um dipolo geocêntrico com polo norte em 80°N , 45°E e momento de dipolo $8 \times 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$. Considerando um ponto P com coordenadas geográficas 40°N , 35°W , determine as componentes NS , EW e Z do campo magnético terrestre, a declinação, a inclinação e a longitude geomagnética.

■ **Problema 42 (Geomagnetismo II)**

(a) Calcule a anomalia magnética produzida por um dipolo magnético subterrâneo a distância d da superfície, sabendo que o dipolo perfaz um ângulo α com relação à vertical. O polo negativo encontra-se na extremidade do dipolo mais próxima à superfície (vide ilustração a seguir).

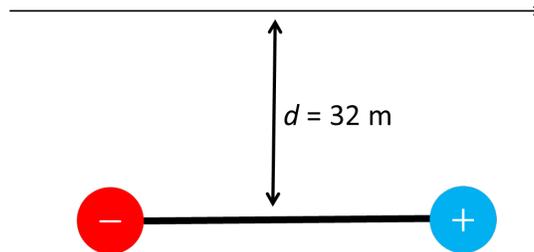


(b) Há um dipolo magnético horizontal ($\alpha = 90^\circ$) situado a 10 m da superfície. O dipolo está no plano vertical perpendicular ao leste geográfico, e é posicionado com o polo negativo voltado para oeste (vide figura a seguir). Sabe-se que $Cm = 5 \times 10^{-5} \text{ T} \cdot \text{m}^3$. Considerando um ponto de coordenadas geográficas 38°N , 30°W , determine os campos nas direções NS, EW e vertical; o campo total F ; e as variações de declinação e inclinação magnéticas decorrentes do dipolo. Suponha que o campo magnético da Terra é produzido por um dipolo com polo norte 72°N , 30°W e $B_0 = 32,000 \text{ nT}$.



■ **Problema 43 (Geomagnetismo III)**

Um dipolo magnético com $Cm = 10^7 \text{ nT}\cdot\text{m}^3$ e polo positivo voltado para o norte geográfico está enterrado em um ponto P com latitude magnética 40°N e profundidade 32 m . Calcule a anomalia de campo total ΔF sabendo que $B_0 = 30,000 \text{ nT}$ e a declinação em P é 12° . Qual é o valor da razão $\Delta F/F^*$, onde F^* é o campo magnético total da Terra?

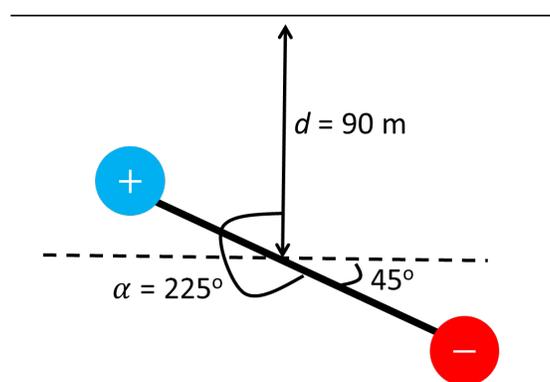


■ **Problema 44 (Geomagnetismo IV)**

Em um ponto com coordenadas geográficas 52°N , 35°W situado a 90 m da superfície, há um dipolo magnético com momento $Cm = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^3$ inclinado a 45° relativamente à horizontal do norte verdadeiro, com o polo negativo voltado para norte e para baixo. Na superfície, observam-se as componentes de campo listadas a seguir. Determine:

- (a) As componentes X^* , Y^* e Z^* no ponto indicado.
- (b) No ponto indicado, a deflexão de uma bússola relativamente ao norte geomagnético.
- (c) As coordenadas geográficas do polo norte do dipolo terrestre.

F	$54,900 \text{ nT}$
H	$12,400 \text{ nT}$
ΔF	-1310 nT
ΔH	624 nT



■ Problema 45 (Geomagnetismo V)

Em um ponto P de coordenadas geográficas 40°N , 26°W e profundidade 90 m, tem-se um dipolo magnético com momento $Cm = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^3$ inclinado em 45° com relação à vertical, com polo positivo para cima; o dipolo situa-se no plano vertical norte-sul. O dipolo da Terra tem polo norte situado em 60°N , 0°E . Utilizando a constante $B_0 = 30,000 \text{ nT}$, responda:

(a) Quais são os valores das componentes de campo Z , H e F ?

(b) Qual é a direção indicada por uma bússola posicionada no ponto P ?

■ Problema 46 (Massa da Atmosfera Terrestre)

Supondo que a atmosfera terrestre é isotérmica com temperatura $T = 290 \text{ K}$, forneça uma estimativa da massa de toda a atmosfera. Qual é a razão entre a massa da atmosfera terrestre e a massa da Terra propriamente dita?

■ Problema 47 (Ionosfera I)

Sabe-se que reconexão no lado noturno ocorre quando o plasma ionosférico é transportado por convecção ao longo da calota polar ($\approx 30^\circ$ de latitude) sob influência de um campo elétrico de 50 mV/m agindo em altitudes ionosféricas. Ademais, supõe-se que, no processo de conexão, o vento solar em choque é instantaneamente acelerado a 500 km/s . O campo magnético ionosférico é suposto igual a $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$. Usando essas informações, forneça uma estimativa do comprimento da cauda magnetosférica.

■ Problema 48 (Ionosfera II)

Não existe um choque magnetosférico em arco à frente da lua. Por quê? Quando o campo magnético interplanetário está alinhado com o escoamento de ventos solares, qual é o raio do rastro lunar se o parâmetro beta do plasma é igual a 3?

■ Problema 49 (Ionosfera III)

Compare a deriva eletromagnética não-colisional $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ em um campo magnético de $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$ produzido por um campo elétrico de 10 mV/m e a deriva diamagnética iônica produzida por uma variação de temperatura igual a 200 K em um plasma de densidade constante igual a 10^5 cm^{-3} ; a variação de temperatura ocorre ao longo de uma distância de 10 km . Se o campo elétrico de 10 mV/m fosse atribuído a um efeito termoelétrico no qual a variação de temperatura é medida em milielétron-volts, qual seria a variação de temperatura em Kelvin ao longo de uma distância de 10 km ? Tenha em mente que essa é uma variação de temperatura exagerada e serve para ilustrar o quão intensos são campos elétricos ionosféricos quando comparados com variações de temperatura.

■ Problema 50 (Ionosfera IV)

Suponha que o campo elétrico em altas latitudes no hemisfério norte é voltado para sul com intensidade 50 mV/m; o campo magnético, por sua vez, é vertical com valor 0.5×10^{-4} T. Se a densidade do plasma na região E é 10^5 cm^{-3} , encontre o vetor densidade de corrente

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (\text{Equação 1})$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de condutividades

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

no qual σ_0 , σ_P e σ_H são respectivamente as condutividades específica; de Pedersen; e de Hall. Utilize a simplificação $\sigma_H \gg \sigma_P$. Quais partículas são as portadoras de carga? Em seguida, repita os cálculos para um referencial que se move com a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Mostre que, utilizando o campo elétrico e o vento neutro no novo referencial, a Equação 1 fornece um valor idêntico àquele obtido na primeira escolha de referencial. Quais partículas transportam a corrente no novo referencial?

■ Problema 51 (Ionosfera V)

Considere as diversas derivas **horizontais** à altitude de 300 km diretamente acima do equador magnético. Especificamente, compare as velocidades associadas à deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ($V_{E \times B}$), deriva gravitacional (V_g), deriva de gradiente de pressão ($V_{\nabla p}$) e deriva horizontal de Pedersen (V_{σ_P}). Utilize os seguintes dados:

- ▶ $E_z = 2$ mV/m (vertical para baixo)
- ▶ $E_{east} = 0.5$ mV/m (utilizado no cálculo da deriva horizontal de Pedersen)
- ▶ $B_y = 0.25 \times 10^{-4}$ T
- ▶ $M = 17.5$ amu (massa molecular média)
- ▶ $n_n = 3.8 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ (densidade de neutros)
- ▶ $g = 9 \text{ m/s}^2$
- ▶ $T = 1000$ K
- ▶ $L = 20$ km (comprimento de escala)

■ Problema 52 (Ionosfera VI)

Se a ionosfera de um planeta não-magnetizado X tem temperatura constante com altitude e igual a 10^5 K, e com perfil de densidade de elétrons exponencial subsolar dado por

$$n_e(h) = 10^5 [\text{cm}^{-3}] \exp\left(\frac{-(h-h_0)}{H_p}\right)$$

onde a altitude de referência h_0 é 130 km e a altura de escala de plasma H_p é 50 km, a que altitude está a ionopausa para uma pressão de vento solar a montante igual a 3 nPa? Compare seu resultado com a pressão ocasionada por uma densidade de vento solar de $\sim 10 \text{ cm}^{-3}$ e velocidade típica 400 km/s sob 1 AU. A que altitude estaria a ionopausa se a pressão de vento solar fosse reduzida para 1 nPa? E se a pressão de vento solar aumentasse para 10 nPa? E se, além do referido aumento de pressão para 10 nPa, tivéssemos também um aumento da altura de escala ionosférica de $H_p = 50$ km para $H_p = 100$ km?

■ Soluções

■ Prob. 29

O gradiente térmico abaixo da lagoa é $30/200 = 0.15^\circ\text{C}/\text{m}$. O fluxo de calor é dado pela equação de Fourier,

$$q'' = k \frac{dT}{dz} = 3.8 \times 0.15 = 0.57 \text{ W/m}^2$$

A área da superfície da lagoa é

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 180^2}{4} = 25,450 \text{ m}^2$$

O calor Q transferido a essa área no decurso de 1 hora (= 3600 s) é tal que

$$Q = qAt = 0.57 \times 25,450 \times 3600 = 5.22 \times 10^7 \text{ J} = 52,220 \text{ kJ}$$

Esse calor é utilizado para fundir uma massa m de gelo. Sendo $L = 334$ KJ o calor latente de fusão da água, segue que

$$m = \frac{Q}{L} = \frac{52,220 \text{ kJ} \cdot \text{h}^{-1}}{334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}} = \boxed{156 \text{ kg/h}}$$

■ Prob. 30

Com $k = 1.75 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ e $Dt/dz = 35^\circ\text{C}/\text{km} = 0.035^\circ\text{C}/\text{m}$, o fluxo de calor é dado pela equação de Fourier,

$$q = k \frac{dT}{dz} = 1.75 \times 0.035 = \boxed{0.0613 \text{ W/m}^2} = 61.3 \text{ mW/m}^2$$

A relação entre o fluxo de calor (W/m^2) e a distância a partir da dorsal ativa mais próxima depende da idade t da crosta oceânica. As duas grandezas estão ligadas pelo modelo GDH1; como o modelo é constituído por duas equações, faz-se necessário supor que a idade da litosfera local é maior ou menor que 55 Ma. Suponhamos que $t > 55$ Ma; nesse caso, com o fluxo de calor $q = 0.0613 \text{ W/m}^2$, podemos estimar t ,

$$q = \frac{510}{\sqrt{t}} \rightarrow t = \left(\frac{510}{q} \right)^2$$

$$\therefore t = \left(\frac{510}{0.0613} \right)^2 = 6.92 \times 10^7 \text{ a} = 69.2 \text{ Ma}$$

Como $t > 55$ Ma, o resultado obtido ultrapassa o limite de aplicação da equação utilizada. Portanto, devemos rejeitar o resultado acima e recorrer à outra equação do modelo GDH1, qual seja,

$$q = 48 + 96 \exp(-0.0278t) \rightarrow t = \frac{1}{0.0278} \times \ln \left(\frac{96}{q - 48} \right)$$

$$\therefore t = \frac{1}{0.0278} \times \ln \left(\frac{96}{61.3 - 48} \right) = 71.1 \text{ Ma}$$

Evidentemente, a distância entre uma região com essa idade e a dorsal ativa mais próxima depende da taxa de espalhamento tectônico. Para uma taxa de espalhamento de 1 cm/a (considerada relativamente lenta e compatível, por exemplo, com o Atlântico norte), a dorsal oceânica mais próxima estaria a uma distância de 711 km. Por outro lado, uma taxa de espalhamento de 6 cm/a (considerada relativamente rápida e compatível, por exemplo, com o limite Nazca-Pacífico) implicaria que a dorsal oceânica mais próxima estaria a cerca de 4270 km.

■ Prob. 31

Parte (a): Resolvemos a equação diferencial do calor para um sistema unidimensional arbitrário no qual a terra é um meio semi-infinito plano e o calor flui verticalmente (positivo para baixo). Nesse caso, a solução para a equação do calor é

$$T = -\frac{\varepsilon}{2k} z^2 + \frac{\dot{q}_0}{k} z + T_0$$

onde ε é o calor gerado por unidade de volume e tempo, k é a condutividade térmica, \dot{q}_0 é o fluxo de calor na superfície e T_0 é a temperatura na superfície. Se todo o calor de fato é gerado na crosta, é válida a condição de contorno $z = H$, $\dot{q}_0 = 0$, resultando em

$$\dot{q}|_{z=H} = -k \frac{dT}{dz} \Big|_{z=H} \rightarrow -k \left(-\frac{\varepsilon \times 2z}{2k} + \frac{\dot{q}_0}{k} \right) \Big|_{z=H} = 0$$

Igualando o termo em parênteses a zero e resolvendo para ε ,

$$\left(-\frac{\varepsilon \times 2z}{2k} + \frac{\dot{q}_0}{k} \right) \Big|_{z=H} = 0 \rightarrow -\frac{\cancel{2}\varepsilon H}{\cancel{2k}} + \frac{\dot{q}_0}{\cancel{k}} = 0$$

$$\therefore -\varepsilon H + \dot{q}_0 = 0$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{\dot{q}_0}{H} = \frac{64 \times 10^{-3}}{32 \times 10^3} = 2 \times 10^{-6} \text{ W/m}^3 = \boxed{2 \mu\text{W/m}^3}$$

Parte (b): Nesse caso, a equação do calor torna-se

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{\varepsilon}{K}$$

com $\varepsilon = Ae^{-z/H}$, de modo que

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{\varepsilon}{k} \rightarrow \frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{A}{k} e^{-z/H}$$

Integrando duas vezes sucessivamente,

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{A}{k} e^{-z/H} \rightarrow T = -\frac{A}{k} H^2 e^{-z/H} + C_1 z + C_2 \quad \text{(I)}$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes de integração desconhecidas. Para determinar essas constantes, observe que ($z = 0, T = T_0$), onde T_0 é a temperatura na superfície crustal,

$$T = -\frac{A}{k} H^2 \times e^{-0/H} + \cancel{C_1 \times 0} + C_2 = T_0$$

$$\therefore -\frac{A}{k} H^2 + C_2 = T_0$$

$$\therefore C_2 = T_0 + \frac{A}{k} H^2$$

Em seguida, sabendo que, conforme explica o enunciado, 'todo o calor interno é gerado no manto', postulamos que o calor gerado na superfície da crosta, isto é, em $z = 0$, é $q = q_0 = 0$; sendo assim,

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -k \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = -k \times \left(\frac{AH}{k} e^{-0/H} + C_1 \right) = 0 \\ \therefore -k \times \left(\frac{AH}{k} + C_1 \right) &= 0 \\ \therefore C_1 &= -\frac{AH}{k}\end{aligned}$$

Substituindo as constantes acima em **(I)**, vem

$$\begin{aligned}T &= -\frac{A}{k} H^2 e^{-z/H} + C_1 z + C_2 = -\frac{A}{k} H^2 e^{-z/H} - \frac{AH}{k} z + T_0 + H^2 \frac{A}{k} \\ \therefore T &= \frac{AH}{k} \left(-He^{-z/H} - z + H \right) + T_0 \quad \text{(II)}\end{aligned}$$

Se o calor tem origem no manto, o fluxo de calor na base da crosta é

$$\begin{aligned}\dot{q}|_{z=H} &= -\dot{q}_0 = -k \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=H} \\ \therefore \dot{q}|_{z=H} &= -k \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{AH}{k} \left(-He^{-z/H} - z + H \right) + T_0 \right] \right|_{z=H} \quad \text{(III)}\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, estabelemos a derivada no lado direito de **(III)**,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= -\frac{A}{k} H^2 \times \left(-\frac{1}{H} \right) e^{-z/H} - \frac{AH}{k} \\ \therefore \frac{dT}{dz} &= \frac{AH}{k} \left(e^{-z/H} - 1 \right) \\ \therefore \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=H} &= \frac{AH}{k} \left(e^{-H/H} - 1 \right) \\ \therefore \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=H} &= \frac{AH}{k} \left(e^{-1} - 1 \right)\end{aligned}$$

Substituindo em **(III)**,

$$\therefore \dot{q}|_{z=H} = -\dot{q}_0 = -k \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{AH}{k} \left(-He^{-z/H} - z + H \right) + T_0 \right] \right|_{z=H}$$

$$\therefore \dot{q}_0 = \cancel{k} \times \frac{AH}{\cancel{k}} \times (e^{-1} - 1)$$

$$\therefore \dot{q}_0 = AH(e^{-1} - 1)$$

$$\therefore A = \frac{\dot{q}_0}{H(e^{-1} - 1)}$$

$$\therefore |A| = \left| \frac{64 \times 10^{-3}}{(32 \times 10^3) \times (e^{-1} - 1)} \right| = 3.16 \times 10^{-6} \text{ W/m}^3 = \boxed{3.16 \mu\text{W/m}^3}$$

Para obter a temperatura a 100 km de profundidade, tomamos $T_0 = 0$ e substituímos os valores pertinentes na equação **(II)**,

$$T = \frac{AH}{k} \left(-He^{-z/H} - z + H \right) + T_0$$

$$\therefore T = \frac{(-3.16 \times 10^{-6}) \times (32 \times 10^3)}{3} \times \left(-(32 \times 10^3) \times e^{-(100 \times 10^3)/(32 \times 10^3)} - (100 \times 10^3) + (32 \times 10^3) \right) + 0$$

$$\therefore \boxed{T = 2340 \text{ K}}$$

modo que

$$I_{\text{Terra}} \approx 0.877 I_{\text{avg}} = 0.877 \times (1.27 \times 10^{38}) \approx \boxed{1.11 \times 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

■ Prob. 32

Parte (a): Aqui, programamos a função **(II)** no Mathematica, obtemos as derivadas e igualamos os lados correspondentes,

```
In[384]:= T[z_, t_] := T0 * Exp[-alpha * z] * Sin[omega * t - beta * z]
```

```
In[388]:= Simplify[D[T[z, t], {t, 1}]]
```

```
Out[388]= e^{-z alpha} T0 omega Cos[z beta - t omega]
```

```
In[389]:= Simplify[D[T[z, t], {z, 2}] * eta]
```

```
Out[389]= e^{-z alpha} T0 eta (2 alpha beta Cos[z beta - t omega] + (-alpha^2 + beta^2) Sin[z beta - t omega])
```

$$\therefore \begin{cases} \eta \times 2\alpha\beta = \omega \\ -\alpha^2 + \beta^2 = 0 \end{cases}$$

A segunda equação implica que $\alpha = \pm\beta$. Substituindo esse resultado na primeira equação, temos

$$\eta \times 2\alpha\beta = \omega \rightarrow \eta \times 2\alpha^2 = \omega$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{\omega}{2\eta}$$

$$\therefore \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}}$$

Esses valores coincidem com as definições usadas na definição do problema, confirmando, pois, que a distribuição de temperatura **(II)** satisfaz a equação da difusão térmica, **(I)**.

Parte (b): A frequência do movimento de translação da Terra é aproximadamente 1.991×10^{-7} rad/sec. Sabendo que a temperatura superficial é de 30 K, busca-se a profundidade z necessária para obter uma oscilação térmica de 0.001 K em um ano. A amplitude das oscilações pico-a-pico é determinada pela parte exponencial da distribuição de temperaturas com a qual estamos trabalhando; sendo assim,

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}}z\right) = \frac{10^{-3}}{30} \rightarrow \exp\left(-\sqrt{\frac{1.991 \times 10^{-7}}{2 \times (1.3 \times 10^{-6})}} \times z\right) = \frac{10^{-3}}{30}$$

$$\therefore -\sqrt{\frac{1.991 \times 10^{-7}}{2 \times (1.3 \times 10^{-6})}} \times z = \ln\left(\frac{10^{-3}}{30}\right)$$

$$\therefore -0.277z = -10.309$$

$$\therefore z = \frac{10.309}{0.277} = \boxed{37.2 \text{ m}}$$

Portanto, o instrumento deve ser posicionado a uma profundidade de aproximadamente 37 m.

Parte (c): Diferenciando a distribuição de temperaturas **(III)** com relação a z , vem

$$\text{In[400]:= } T[z_, t_] := T0 * Exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2 * \eta}} * z\right] * Sin\left[\omega * t - \sqrt{\frac{\omega}{2 * \eta}} * z\right]$$

$$\text{In[401]:= Simplify[D[T[z, t], {z, 1}]]$$

$$e^{-\frac{z \sqrt{\frac{\omega}{\eta}}}{\sqrt{2}}} T_0 \sqrt{\frac{\omega}{\eta}} \left(\cos\left[t \omega - \frac{z \sqrt{\frac{\omega}{\eta}}}{\sqrt{2}}\right] + \sin\left[t \omega - \frac{z \sqrt{\frac{\omega}{\eta}}}{\sqrt{2}}\right] \right)$$

$$\therefore \frac{dT}{dz} = \sqrt{\frac{\omega}{\eta}} T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right) \left[\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right) + \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right) \right]$$

$$\therefore \frac{dT}{dz} = \sqrt{\frac{\omega}{\eta}} T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right) \left[\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

A função acima tem valor máximo quando o termo trigonométrico é igual a 1. Sendo assim, o gradiente térmico $(dT/dz)_{\max}$ que buscamos é

$$\boxed{\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{\omega}{\eta}} T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z\right)}$$

Parte (d): Fazendo $A = \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} = \frac{1}{z^*}$, a diferença de temperaturas ΔT na metade inferior do poço torna-se

$$\Delta T = T(z) - T\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\therefore \Delta T = T_0 e^{-Az} \sin(\omega t - Az) - T_0 e^{-Az/2} \sin\left(\omega t - \frac{A}{2} z\right) \quad \text{(IV)}$$

Segue que ΔT tem a forma geral

$$\Delta T = T_0 f \sin(\omega t - \phi) \quad \text{(V)}$$

onde f é o fator a ser determinado. Igualando **(IV)** e **(V)**,

$$T_0 e^{-Az} \sin(\omega t - Az) - T_0 e^{-Az/2} \sin\left(\omega t - \frac{A}{2} z\right) = T_0 f \sin(\omega t - \phi)$$

Substituindo $\omega t = 0$,

$$\cancel{T_0} e^{-Az} \sin(0 - Az) - \cancel{T_0} e^{-Az/2} \sin\left(0 - \frac{A}{2} z\right) = \cancel{T_0} f \sin(0 - \phi)$$

$$\therefore -e^{-Az} \sin(Az) + e^{-Az/2} \sin\left(\frac{Az}{2}\right) = -f \sin(\phi) \quad \text{(VI)}$$

Substituindo $\omega t = \pi/2$,

$$\cancel{T_0} e^{-Az} \sin\left(\frac{\pi}{2} - Az\right) - \cancel{T_0} e^{-Az/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} z\right) = \cancel{T_0} f \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$\therefore e^{-Az} \cos(Az) - e^{-Az/2} \cos\left(\frac{Az}{2}\right) = f \cos(\phi) \quad \text{(VII)}$$

Elevando **(VI)** ao quadrado,

$$\left[-e^{-Az} \sin(Az) + e^{-Az/2} \sin\left(\frac{Az}{2}\right) \right]^2 = [-f \sin(\phi)]^2$$

$$\therefore f^2 \sin^2 \phi = \left[-e^{-Az} \sin(Az) + e^{-Az/2} \sin\left(\frac{Az}{2}\right) \right]^2$$

$$\therefore f^2 \sin^2 \phi = e^{-2Az} \left[-e^{\frac{Az}{2}} \sin\left(\frac{Az}{2}\right) + \sin(Az) \right]^2 \quad \text{(VIII)}$$

Elevando **(VII)** ao quadrado,

$$f^2 \cos^2(\phi) = \left[e^{-Az} \cos(Az) - e^{-Az/2} \cos\left(\frac{Az}{2}\right) \right]^2$$

$$\therefore f^2 \cos^2(\phi) = e^{-2Az} \left[e^{\frac{Az}{2}} \cos\left(\frac{Az}{2}\right) - \cos(Az) \right]^2 \quad \text{(IX)}$$

Somando **(VIII)** e **(IX)** e simplificando com o Mathematica,

$$\text{In[407]:= Simplify}\left[e^{-2Az} \left(-e^{\frac{Az}{2}} \sin\left[\frac{Az}{2}\right] + \sin[Az] \right)^2 + e^{-2Az} \left(-e^{\frac{Az}{2}} \cos\left[\frac{Az}{2}\right] + \cos[Az] \right)^2 \right]$$

$$\text{Out[407]= } e^{-2Az} \left(1 + e^{Az} - 2e^{\frac{Az}{2}} \cos\left[\frac{Az}{2}\right] \right)$$

Como mostra o código acima, tem-se

$$f^2 \sin^2(\phi) + f^2 \cos^2(\phi) = e^{-2Az} \left[1 + e^{Az} - 2e^{\frac{Az}{2}} \cos\left(\frac{Az}{2}\right) \right]$$

$$\therefore f^2 = e^{-2Az} \left[1 + e^{Az} - 2e^{\frac{Az}{2}} \cos\left(\frac{Az}{2}\right) \right]$$

$$\therefore f = \sqrt{e^{-2Az} \left[1 + e^{Az} - 2e^{\frac{Az}{2}} \cos\left(\frac{Az}{2}\right) \right]}$$

$$\therefore f = \sqrt{e^{-At} \left[e^{-At} + 1 - 2e^{-\frac{At}{2}} \cos\left(\frac{At}{2}\right) \right]}$$

Finalmente, observando que $x = At$,

$$f = \sqrt{e^{-x} \left[e^{-x} + 1 - 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]} \quad (\mathbf{X})$$

Para maximizar f , tomamos a derivada de f em relação a x , igualamos a zero e resolvemos para x usando o comando *FindRoot* do Mathematica,

$$\text{In[417]:= } f[x_] := \sqrt{E^{-x} * \left(E^{-x} + 1 - 2 * E^{-x/2} * \text{Cos}\left[\frac{x}{2}\right] \right)}$$

$$\text{In[418]:= } \text{FindRoot}[D[f[x], \{x, 1\}] == 0, \{x, 1\}]$$

$$\text{Out[418]= } \{x \rightarrow 1.3348\}$$

Convidamos o leitor a obter a segunda derivada de f e substituir $x = 1.3348$ para verificar que $f''(x = 1.3348) < 0$, indicando, pois, que o ponto crítico em questão é um máximo local. Podemos então substituir $x \approx 1.335$ e obter o f máximo que buscamos,

$$f(x = 1.335) = \sqrt{e^{-1.335} \times \left[e^{-1.335} + 1 - 2e^{-\frac{1.335}{2}} \cos\left(\frac{1.335}{2}\right) \right]} = 0.3469 \approx \boxed{0.347}$$

Considere os dados fornecidos na parte final do enunciado. Podemos facilmente resolver para a frequência angular ω com o Mathematica,

$$x = \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} z \rightarrow 1.335 = \sqrt{\frac{\omega}{2 \times (1.26 \times 10^{-6})}} \times 1000$$

$$\text{In[429]:= } \text{Solve}\left[1.335 == 1000 * \sqrt{\omega / (2 * 1.26 * 10^{-6})}, \omega\right]$$

$$\text{Out[429]= } \left\{ \left\{ \omega \rightarrow 4.49121 \times 10^{-12} \right\} \right\}$$

$$\therefore \omega = 4.49 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Por fim, o período T da onda térmica é

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{4.49 \times 10^{-12}} = 1.40 \times 10^{12} \text{ sec} = \boxed{44,390 \text{ anos}}$$

Lembre-se que utilizamos a notação americana de grandezas. O resultado acima é 44 **ponto** 39 mil anos.

■ **Prob. 33**

A vazão de magma é dada pelo produto $J = 4 \times 10,000 \times \bar{v}$, onde \bar{v} é a velocidade média na saída do dique. A erupção durou 50 dias, o que equivale a $50 \times 86,400 = 4.32 \times 10^6$ s. Sabe-se ainda que o volume de magma ejetado foi de 9.5 km^3 ou $9.5 \times 10^9 \text{ m}^3$. Podemos utilizar tais informações para estimar \bar{v} , qual seja,

$$(4 \times 10,000 \times \bar{v}) \times (4.32 \times 10^6) = 9.5 \times 10^9 \rightarrow \bar{v} = \frac{9.5 \times 10^9}{4 \times 10,000 \times (4.32 \times 10^6)}$$

$$\therefore \bar{v} = 0.055 \text{ m/sec} = \boxed{5.5 \text{ cm/sec}}$$

Sendo $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 300 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ a densidade e viscosidade do magma respectivamente, o número de Reynolds associado ao escoamento é

$$Re_w = \frac{\rho \bar{v} w}{\mu} = \frac{2750 \times 0.055 \times 4}{300} = 2.02$$

Um escoamento interno com $Re_w \lesssim 2100$, como no presente caso, é laminar.

■ **Prob. 34**

Parte (a): O gradiente de pressão dp/dx ao longo da descida é dado por

$$\frac{dp}{dx} = \rho_m g \alpha$$

onde α é a declividade, que no caso é igual a $800/42,000 = 0.01905$. Substituindo acima, vem

$$\frac{dp}{dx} = 2600 \times 9.81 \times 0.01905 = \boxed{486 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Parte (b): A pressão a uma elevação de 200 m em uma coluna de magma é dada por $\rho_m g z$, onde $z = 800 \text{ m}$ e

$$p = \rho_m g z = 2600 \times 9.81 \times 800 = 2.04 \times 10^7 \text{ Pa} = 20.4 \text{ MPa}$$

O gradiente correspondente é

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2.04 \times 10^7}{42,000} = \boxed{486 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Parte (c): As respostas em (a) e (b) são idênticas e indicam que, se a gravidade for o único fator impelindo o escoamento de magma ao longo da LERZ, então o gradiente de pressão causando o extravasamento na abertura #8 será independente do caminho percorrido pelo magma. É importante observar, todavia, que essa observação ignora contribuições oriundas de atrito ou outros efeitos dissipativos.

Parte (d): O raio do conduto que alimenta a fissura pode ser obtido a partir da equação de Poiseuille,

$$Q = -\frac{\pi r_0^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \rightarrow r_0 = \left[-\frac{8\mu Q}{\pi (dp/dx)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore r_0 = \left[-\frac{8 \times 300 \times 100}{\pi \times (-486)} \right]^{\frac{1}{4}} = \boxed{3.54 \text{ m}}$$

■ Checklist Rápido 2

35.1. Falso. Pela lei de Fourier, o fluxo de condução de calor q'' dá-se como $q'' = -\kappa \nabla T$, onde ∇T é o gradiente térmico e κ é a *condutividade* térmica. Há uma clara distinção entre *condutividade* térmica κ , um parâmetro que governa a transmissão de calor por condução, e a *difusividade* térmica α , um parâmetro definido pela razão $\kappa/\rho c_p$, onde ρ é a densidade do fluido e c_p é o calor específico do fluido. Assim como a difusividade mássica é frequentemente utilizada em problemas de convecção de massa, a difusividade térmica frequentemente aparece em problemas de convecção de calor.

35.2. Falso. Usamos a fórmula usual para cascas esféricas com o intento de estimar o volume do manto,

$$\nabla_m = \frac{4\pi}{3} \times \left[(6361 \times 10^3)^3 - (3480 \times 10^3)^3 \right] = 9.02 \times 10^{20} \text{ m}^3$$

Multiplicamos esse valor de volume pela taxa volumétrica de geração de calor fornecida na assertiva,

$$q = \nabla_m Q''' = (9.02 \times 10^{20}) \times (1.5 \times 10^{-8}) = 1.35 \times 10^{13} \text{ W} = \boxed{13.5 \text{ TW}}$$

35.3. Alternativa B. A razão de Koenigsberger é definida como o quociente entre magnetizações remanente e induzida de uma rocha.

35.4. Falso. Gilbert viveu na segunda metade do século XVI e já estava morto há décadas quando do surgimento das primeiras tecnologias de sondagem geomagnética. O mapeamento do Atlântico norte mencionado na assertiva foi capitaneado pelo também astrônomo inglês Edmond Halley (1656 – 1741).

35.5. Verdadeiro. A velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo (ou seja, a velocidade da luz) é dada pela célebre expressão

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Usando esse resultado, a velocidade v com que uma mesma onda eletromagnética se propaga em um meio de constante dielétrica κ e permeabilidade magnética $\mu = \mu_0$ é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \kappa \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \times \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}_{=c}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}$$

$$\therefore v = \frac{c}{\sqrt{\kappa}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{12}} = 8.66 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1} = \boxed{0.0866 \text{ m} \cdot \text{nsec}^{-1}}$$

35.6. Verdadeiro. A profundidade de penetração d de uma onda eletromagnética em um sólido é dada por

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo (supõe-se que o sólido não está magnetizado), σ é a condutividade do sólido e ω é a frequência circular da onda. Usando $\sigma = 1/\rho$ e $\omega = 2\pi f$, escrevemos

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \times \frac{1}{\rho} \times 2\pi f}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \mu_0 f}}$$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{5000}{\pi \times (4\pi \times 10^{-7}) \times 1000}} = \boxed{1125 \text{ m}}$$

35.7. Falso. A relação correta é $\mu = 1 + K$.

35.8. Alternativa B. Os três primeiros coeficientes gaussianos não-nulos são g_1^0 , g_1^1 e h_1^1 .

35.9. Falso. Funções quase-ortogonais de Schmidt somente são idênticas às funções zonais de Legendre no caso de ordem $m = 0$; em outros casos, os dois tipos de função distinguem-se pelo fator normalizante

$$\left[\frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2}$$

onde m e n são a ordem e grau das funções em questão.

35.10. Verdadeiro. Parte da assertiva foi extraída de um verbete do volume *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*.

35.11. Alternativa D. De acordo com Howard (2014), tempestades geomagnéticas ocasionadas por ejeções de massa coronal são associadas com quatro efeitos principais na Terra, a saber:

1. Uma forte perturbação no campo geomagnético, manifestada sob a forma de flutuações em magnitude, direção e orientação.
2. Aumento da população de partículas energéticas na magnetosfera e na ionosfera.
3. Reconfiguração das componentes magnéticas e plasmáticas da magnetosfera, incluindo, por exemplo, um encolhimento da plasmasfera.
4. Intensificação da corrente anelar e dos cinturões de radiação.

O efeito 4 torna falsa a alternativa D.

■ Prob. 36

Parte (a): O momento de dipolo magnético m da Terra pode ser estimado como

$$m = \frac{4\pi}{\mu_0} R^3 \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}$$

$$\therefore m = \frac{4\pi}{4\pi \times 10^{-7}} \times (6371 \times 10^3)^3 \times \sqrt{[(-29,442)^2 + (-1501)^2 + (4797)^2]} \times 10^{-18}$$

$$\therefore m \approx 7.724 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Parte (b): Sejam a latitude e longitude do polo magnético respectivamente iguais a λ_p e ϕ_p . Utilizando os coeficientes gaussianos fornecidos, a latitude λ_p do campo geomagnético é dada por

$$\tan |\lambda_p| = \left| \frac{g_1^0}{\sqrt{(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}} \right| = \frac{29,442}{\sqrt{(-1501)^2 + 4797^2}} = 5.857$$

$$\therefore \lambda_p = \arctan(5.857) = \boxed{80.3^\circ \text{ N}}$$

ao passo que a longitude ϕ_p é tal que

$$\tan \phi_p = \frac{h_1^1}{g_1^1} = \frac{-4797}{1501} = -3.196$$

$$\therefore \phi_p = \arctan(-3.196) = -72.6^\circ = 72.6^\circ \text{ W} = \boxed{287.4^\circ \text{ E}}$$

■ Prob. 37

O potencial de um dipolo a distância r do seu centro e azimute θ a partir do eixo é dado por

$$W = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^2}$$

Por diferenciação, obtemos as componentes

$$B_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$$

O campo magnético total B_t é então

$$B_t = \sqrt{(B_r)^2 + (B_\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}\right)^2}$$

$$\therefore B_t = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sqrt{(2m \cos \theta)^2 + (m \sin \theta)^2}$$

$$\therefore B_t = \frac{m\mu_0}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$\therefore B_t = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

A longitude magnética é o complemento do azimute mensurado a partir do eixo dipolar ($\lambda = 90^\circ - \theta$). Portanto, o campo total à latitude λ é

$$B_t = B_{eq} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} \quad \text{onde} \quad B_{eq} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \quad \text{(I)}$$

onde B_{eq} é o campo magnético no equador ($\lambda = 0$). Na superfície da Terra, $r = R = 6371$ km. Com o dado momento magnético $m = 7.724 \times 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ e a permeabilidade magnética do vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{A}^{-2}$, a intensidade do campo no equador torna-se

$$B_{eq} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} = \frac{(4\pi \times 10^7) \times (7.724 \times 10^{22})}{4\pi \times (6371 \times 10^3)^3} = 2.9869 \times 10^{-5} \text{ T} = 29,869 \text{ nT}$$

A taxa de variação de B_t com relação à latitude λ pode ser obtida diferenciando a equação (I),

$$\frac{\partial B_t(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{B_{eq}}{2} \frac{3(2 \sin \lambda \cos \lambda)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}} = B_{eq} \frac{3 \sin 2\lambda}{2\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}}$$

Uma variação em latitude $\partial\lambda$ corresponde a uma distância ao longo da superfície tal que $\partial s = R\partial\lambda$; a taxa de variação em B_t por km na direção norte em latitude 30°N é então

$$\frac{\partial B_t(\lambda)}{\partial s} = \frac{1}{R} \frac{\partial B_t(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{B_{eq}}{R} \frac{3 \sin 2\lambda}{2\sqrt{1+3\sin^2 \lambda}} = \frac{29,869}{6371} \times \frac{3 \sin(2 \times 30^\circ)}{2\sqrt{1+3\sin^2 30^\circ}} = \boxed{4.60 \text{ nT} \cdot \text{km}^{-1}}$$

■ Prob. 38

Podemos relacionar a inclinação I e a latitude λ pela equação usual

$$\tan I = 2 \tan \lambda \quad (\mathbf{I})$$

Recorremos à relação trigonométrica

$$\sec^2 \varphi = 1 + \tan^2 \varphi$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \varphi} \tan \varphi = \sec^2 \varphi = 1 + \tan^2 \varphi$$

Diferenciando **(I)** com relação a λ , vem

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \tan I = 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \tan \lambda$$

$$\therefore \sec^2 I \frac{\partial I}{\partial \lambda} = 2 \sec^2 \lambda$$

$$\therefore (1 + \tan^2 I) \frac{\partial I}{\partial \lambda} = 2(1 + \tan^2 \lambda)$$

$$\therefore \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2(1 + \tan^2 \lambda)}{1 + \tan^2 I}$$

$$\therefore \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2(1 + \tan^2 \lambda)}{1 + (2 \tan \lambda)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2(1 + \tan^2 \lambda)}{1 + 4 \tan^2 \lambda}$$

Para a latitude 45°N , tem-se $\tan \lambda = 1$ e

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2(1+1)}{1+4 \times 1} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Portanto, uma pequena variação de latitude $\Delta\lambda$ implica uma mudança de inclinação igual a $\Delta I = (4/5)\Delta\lambda$.

■ **Prob. 39**

Supondo um campo de dipolo geocêntrico, a inclinação magnética I guarda relação com a distância angular θ a partir do polo magnético. A distância angular entre duas localizações quaisquer é obtida a partir dos cossenos diretores (ℓ, m, n) , isto é,

$$\ell = \cos \lambda \cos \phi$$

$$m = \cos \lambda \sin \phi$$

$$n = \sin \lambda$$

Denotamos os cossenos diretores que passam por Boulder ($\lambda = 40^\circ$, $\phi = -105^\circ$) com o subscrito 1 e os cossenos diretores referentes ao polo magnético ($\lambda = 80^\circ$, $\phi = -72^\circ$) com o subscrito 2. Sendo assim,

$$\ell_1 = \cos \lambda \cos \phi = \cos(40^\circ) \times \cos(-105^\circ) = -0.1983$$

$$m_1 = \cos \lambda \sin \phi = \cos(40^\circ) \times \sin(-105^\circ) = -0.7399$$

$$n_1 = \sin \lambda = \sin(40^\circ) = 0.6428$$

$$\ell_2 = \cos \lambda \cos \phi = \cos(80^\circ) \times \cos(-72^\circ) = 0.0537$$

$$m_2 = \cos \lambda \sin \phi = \cos(80^\circ) \times \sin(-72^\circ) = -0.1651$$

$$n_2 = \sin \lambda = \sin(80^\circ) = 0.9848$$

Sendo θ o ângulo entre os eixos, tem-se

$$\cos \theta = \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \left[\begin{array}{c} -0.1983 \times 0.0537 - 0.7399 \times (-0.1651) \\ + 0.6428 \times 0.9848 \end{array} \right] = 0.7445$$

$$\therefore \theta = \arccos(0.7445) = 41.88^\circ$$

Podemos então computar a inclinação I do campo magnético em Boulder,

$$\tan I = 2 \cot \theta = 2 \times \cot(41.88^\circ) = 2.2306$$

$$\therefore I = \arctan(2.2306) = \boxed{65.85^\circ}$$

A declinação D , por sua vez, é

$$\cos D = \frac{\sin \lambda_2 - \sin \lambda_1 \cos \theta}{\cos \lambda_1 \sin \theta} = \frac{\sin(80^\circ) - \sin(40^\circ) \times \cos(41.88^\circ)}{\cos(40^\circ) \times \sin(41.88^\circ)} = 0.9899$$

$$\therefore D = \arccos(0.9899) = \boxed{8.15^\circ \text{ E}}$$

■ Prob. 40

Parte (a): O valor negativo da componente vertical sugere que o campo está voltado para cima; por conseguinte, a inclinação magnética é negativa. Devido à diferença entre as latitudes geográfica e magnética, é possível que duas localizações imediatamente a norte do equador tenham inclinações pequenas mas negativas; uma vez que a componente vertical no presente caso é grande, podemos inferir que a localização está no hemisfério sul.

Parte (b): A intensidade total T é dada por

$$T = \sqrt{N^2 + E^2 + V^2} = \sqrt{27,200^2 + (-1800)^2 + (-40,100)^2} = \boxed{48,490 \text{ nT}}$$

Parte (c): A declinação D é

$$\tan D = \frac{E}{N} = \frac{-1800}{27,200} = -0.0662$$

$$\therefore D = \arctan(-0.0662) = -3.79^\circ = \boxed{3.79^\circ \text{ W}}$$

ao passo que a inclinação I é tal que

$$\sin I = \frac{V}{T} = \frac{-40,100}{48,490} = -0.827$$

$$\therefore I = \arcsin(-0.827) = \boxed{-55.79^\circ}$$

■ Prob. 41

A latitude e longitude geomagnéticas (ϕ^*, λ^*), as coordenadas geográficas (ϕ, λ) e as coordenadas do polo norte geomagnético (ϕ_B, λ_B) relacionam-se pelas expressões

$$\sin \phi^* = \sin \phi_B \sin \phi + \cos \phi_B \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_B)$$

$$\sin \lambda^* = \frac{\sin(\lambda - \lambda_B) \cos \phi}{\cos \phi^*}$$

Substituindo $\phi_B = 80^\circ \text{N}$, $\lambda_B = 45^\circ \text{E}$, $\phi = 40^\circ \text{N}$ e $\lambda = 35^\circ \text{W} = 325^\circ$, temos, na primeira equação,

$$\sin \phi^* = \sin 80^\circ \sin 40^\circ + \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos(325^\circ - 45^\circ)$$

$$\therefore \sin \phi^* = 0.656$$

$$\therefore \phi^* = \arcsin(0.656) = 41.0^\circ$$

e na segunda,

$$\sin \lambda^* = \frac{\sin(325^\circ - 45^\circ) \times \cos 40^\circ}{\cos 41.0^\circ} = -0.999598$$

$$\therefore \lambda^* = \arcsin(-0.999598) = \boxed{-88.4^\circ}$$

De acordo com o enunciado do problema, o campo magnético da Terra pode ser modelado como um dipolo. Segue que as componentes vertical (Z^*) e horizontal (H^*) podem ser calculadas com as expressões

$$Z^* = 2B_0 \sin \phi^*$$

$$H^* = B_0 \cos \phi^*$$

onde B_0 é a constante geomagnética,

$$B_0 = \frac{Cm}{a^3} = \frac{10^{-7} \times (8 \times 10^{22})}{(6370 \times 10^3)^3} = 3.10 \times 10^{-5} \text{ T} = 31,000 \text{ nT}$$

Substituindo nas equações para Z^* e H^* , vem

$$Z^* = 2 \times 31,000 \times \sin 41.0^\circ = \boxed{40,680 \text{ nT}}$$

$$H^* = 31,000 \times \cos 41.0^\circ = 23,400 \text{ nT}$$

Em seguida, determinamos a declinação magnética D^* ,

$$\sin D^* = -\frac{\cos \phi_B \sin(\lambda - \lambda_B)}{\cos \phi} = -\frac{\cos 80^\circ \sin(325^\circ - 45^\circ)}{\cos 41.0^\circ}$$

$$\therefore \sin D^* = 0.227$$

$$\therefore D^* = \arcsin(0.227) = \boxed{13.1^\circ}$$

e a inclinação magnética I^* ,

$$\tan I^* = 2 \tan \phi^* \rightarrow \tan I^* = 2 \tan 41.0^\circ$$

$$\therefore \tan I^* = 1.739$$

$$\therefore I^* = \arctan(1.739) = \boxed{60.1^\circ}$$

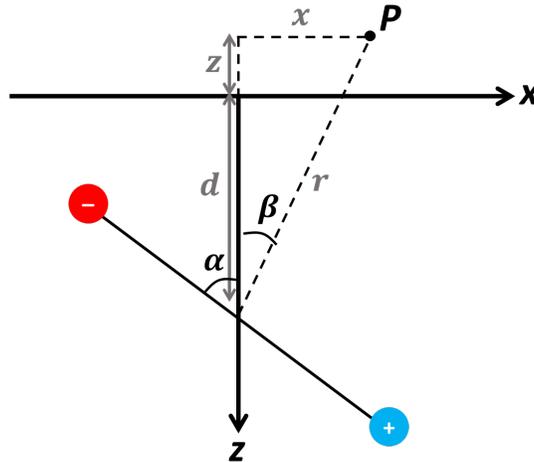
Sendo $H^* = 23,400 \text{ nT}$, as componentes NS (X^*) e EW (Y^*) são tais que

$$X^* = H^* \cos D^* = 23,400 \times \cos 13.1^\circ = \boxed{22,790 \text{ nT}}$$

$$Y^* = H^* \sin D^* = 23,400 \times \sin 13.1^\circ = \boxed{5300 \text{ nT}}$$

■ **Prob. 42**

Parte (a): Seja um ponto P com coordenadas (x,z) , onde x é medido ao longo da horizontal e z é medido ao longo da vertical acima da superfície livre, como ilustra a figura a seguir.



O segmento de comprimento r perfaz um ângulo β com a vertical. O potencial magnético anômalo $\Delta\Phi$ produzido pelo dipolo no ponto P é dado por

$$\Delta\Phi = \frac{-Cm \cos(\alpha + \beta)}{r^2} = \frac{-Cm(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{r^2} \quad \text{(I)}$$

onde

$$\cos \beta = \frac{z + d}{\sqrt{x^2 + (z + d)^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z + d)^2}}$$

Substituindo em (I),

$$\Delta\Phi = \frac{-Cm \left(\frac{z + d}{\sqrt{x^2 + (z + d)^2}} \cos \alpha - \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z + d)^2}} \sin \alpha \right)}{\left[\sqrt{x^2 + (z + d)^2} \right]^2}$$

$$\therefore \Delta\Phi = \frac{-Cm[(z+d)\cos\alpha - x\sin\alpha]}{[x^2 + (z+d)^2]^{3/2}}$$

Devemos calcular a anomalia magnética ΔB ,

$$\Delta B = -\nabla(\Delta\Phi)$$

A componente vertical da anomalia magnética, supondo que o eixo z positivo é vertical para baixo, é dada por $\Delta Z = \partial(\nabla\Phi)/\partial z$ e pode ser obtida no Mathematica:

$$\text{In[360]:= } \Phi[x_, z_] := \frac{-Cm * ((z + d) * \text{Cos}[\alpha] - x * \text{Sin}[\alpha])}{(\sqrt{x^2 + (z + d)^2})^3}$$

$$\text{In[362]:= } \text{dev} = \mathbf{D}[\Phi[x, z], \{z, 1\}]$$

$$\text{Out[362]= } -\frac{Cm \text{Cos}[\alpha]}{(x^2 + (d + z)^2)^{3/2}} + \frac{3 Cm (d + z) ((d + z) \text{Cos}[\alpha] - x \text{Sin}[\alpha])}{(x^2 + (d + z)^2)^{5/2}}$$

Substituindo $z = 0$, obtemos ΔZ em pontos na superfície,

$$\text{In[364]:= } \text{Simplify}\left[-\frac{Cm \text{Cos}[\alpha]}{(x^2 + (d + z)^2)^{3/2}} + \frac{3 Cm (d + z) ((d + z) \text{Cos}[\alpha] - x \text{Sin}[\alpha])}{(x^2 + (d + z)^2)^{5/2}}\right] /. z \rightarrow 0$$

$$\text{Out[364]= } \frac{Cm ((2 d^2 - x^2) \text{Cos}[\alpha] - 3 d x \text{Sin}[\alpha])}{(d^2 + x^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \Delta Z = \frac{Cm[(2d^2 - x^2)\cos(\alpha) - 3dx\sin(\alpha)]}{[x^2 + (z+d)^2]^{5/2}}$$

Prosseguindo de maneira análoga, determina-se a componente $\Delta X = \partial(\nabla\Phi)/\partial x$ da anomalia na horizontal x ,

$$\Delta X = \frac{Cm[(2x^2 - d^2)\sin(\alpha) - 3dx\cos(\alpha)]}{[x^2 + (z+d)^2]^{5/2}}$$

Parte (b): Conforme mostra o esboço fornecido no enunciado, temos $\alpha = 90^\circ$ (pois o dipolo é horizontal) e $x = 0$ (porque o ponto P está diretamente acima do centro do dipolo). Escrevemos ΔX e ΔY como as componentes da anomalia na direção dos eixos horizontais NS e EW , respectivamente. Sabendo que o dipolo está na vertical relativa ao eixo EW , a componente norte-sul é $\Delta X = 0$. Ademais, a componente vertical é $\Delta Z = 0$ e a componente ΔY é

$$\Delta Y = \frac{Cm \left[(2x^2 - d^2) \sin \alpha - 3dx \cos \alpha \right]}{(x^2 + d^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \Delta Y = \frac{(5 \times 10^{-5}) \times \left[(2 \times 0^2 - 10^2) \sin 90^\circ - 3 \times 10 \times 0 \times \cos 90^\circ \right]}{(0^2 + 10^2)^{5/2}} = -5.0 \times 10^{-8} \text{ T}$$

$$\therefore \boxed{\Delta Y = -50 \text{ nT}}$$

A anomalia magnética total é obtida com facilidade,

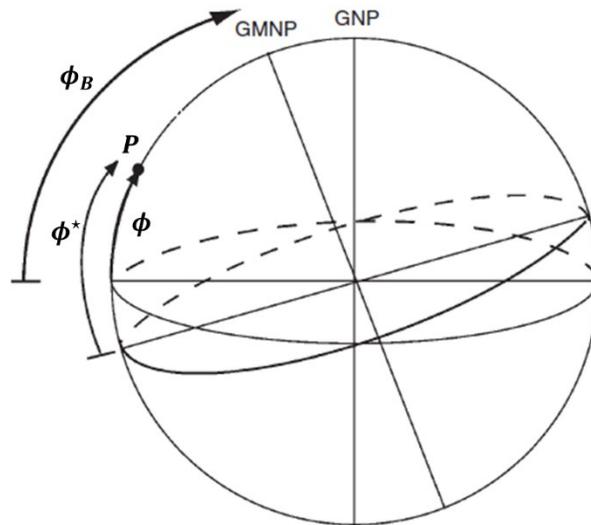
$$|\Delta B| = \left| \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-50)^2} = 50 \text{ nT}$$

Para obter as componentes da anomalia magnética na direção do campo magnético terrestre, F , e a componente horizontal H correspondente, escrevemos

$$\Delta H = \Delta X \cos D^* + \Delta Y \sin D^* \quad (\text{II})$$

$$\Delta F = \Delta H \cos I^* + \Delta Z \sin I^* \quad (\text{III})$$

Antes de prosseguir, precisamos da declinação e inclinação magnéticas D^* e I^* , respectivamente. Considere a figura a seguir.



Sabendo que o ponto P tem a mesma longitude que o polo norte geomagnético (GMNP na figura anterior), temos

$$\phi^* = 90^\circ - (\phi_B - \phi) = 90^\circ - (72^\circ - 38^\circ) = 56^\circ$$

$$D^* = 0^\circ$$

A inclinação, por sua vez, é

$$\tan I^* = 2 \tan \phi^*$$

$$\therefore \tan I^* = 2 \tan 56^\circ = 2.70$$

$$\therefore I^* = \arctan(2.70) = 69.7^\circ$$

Substituindo nas equações **(II)** e **(III)**,

$$\Delta H = 0 \times \cos(0^\circ) + (-50) \times \sin(0^\circ) = 0$$

$$\Delta F = 0 \times \cos(69.7^\circ) + 0 \times \sin(69.7^\circ) = 0$$

Buscam-se os valores totais do campo nas direções NS, EW e vertical; busca-se também o campo total F . Estes são dados por

$$X_T = X^* + \Delta X$$

$$Y_T = Y^* + \Delta Y$$

$$Z_T = Z^* + \Delta Z$$

$$F_T = F^* + \Delta F$$

As componentes vertical Z^* e horizontal H^* do campo geomagnético são

$$Z^* = 2B_0 \sin \phi^* = 2 \times 32,000 \times \sin(56^\circ) = 53,060 \text{ nT}$$

$$H^* = B_0 \cos \phi^* = 32,000 \times \cos(56^\circ) = 17,890 \text{ nT}$$

As componentes NS (X^*) e horizontal EW (Y^*) do campo magnético terrestre, bem como a magnitude F^* , são

$$X^* = H^* \cos D^* = 17,890 \times \cos(0^\circ) = 17,890 \text{ nT}$$

$$Y^* = H^* \sin D^* = 17,890 \times \sin(0^\circ) = 0$$

$$F^* = \sqrt{X^{*2} + Z^{*2}} = \sqrt{17,890^2 + 53,060^2} = 55,990 \text{ nT}$$

Por fim, as componentes totais que buscamos são

$$X_T = X^* + \Delta X = 17,890 + 0 = \boxed{17,980 \text{ nT}}$$

$$Y_T = Y^* + \Delta Y = 0 + (-50) = \boxed{-50 \text{ nT}}$$

$$Z_T = Z^* + \Delta Z = 53,060 + (-50) = \boxed{53,010 \text{ nT}}$$

$$F_T = F^* + \Delta F = 55,990 + 0 = \boxed{55,990 \text{ nT}}$$

E as variações em declinação e inclinação magnética atribuídas ao dipolo subterrâneo são

$$\tan D' = \frac{Y_T}{X_T} = \frac{-50}{17,980}$$

$$\therefore D' = \arctan\left(\frac{-50}{17,980}\right) = -0.159^\circ$$

$$\therefore D^* - D' = 0 - (-0.159^\circ) = \boxed{0.159^\circ}$$

$$\tan I' = \frac{Z_T}{H_T} = \frac{53,010}{17,980}$$

$$\therefore I' = \arctan\left(\frac{53,010}{17,980}\right) = 71.3^\circ$$

$$\therefore I^* - I' = 69.7^\circ - 71.3^\circ = \boxed{-1.60^\circ}$$

■ Prob. 43

A componente de anomalia magnética ΔF na direção do campo magnético da Terra é dada por

$$\Delta F = \Delta H \cos I^* + \Delta Z \sin I^*$$

Primeiramente, calculamos as componentes nas direções geográficas da anomalia magnética produzida pelo dipolo enterrado, observando que $\alpha = 90^\circ$ porque o dipolo é horizontal e $x = 0$ porque o centro do dipolo está abaixo do ponto. Nessa situação, $\Delta Y = 0$ porque o dipolo está no plano geográfico norte-sul. Logo,

$$\Delta X = -\frac{Cm}{d^3} \quad ; \quad \Delta Y = 0 \quad ; \quad \Delta Z = 0$$

Substituindo $Cm = 10^7 \text{ nT}\cdot\text{m}$ e $d = 32 \text{ m}$ em ΔX , vem

$$\Delta X = -\frac{Cm}{d^3} = -\frac{10^7}{32^3} = -305 \text{ nT}$$

Usando $D^* = 12^\circ$, a componente da anomalia magnética na direção da componente horizontal do campo geomagnético é

$$\Delta H = \Delta X \cos D^* = -305 \times \cos(12^\circ) = -298 \text{ nT}$$

Para um ponto de latitude magnética $\phi^* = 40^\circ$, a inclinação magnética é

$$\tan I^* = 2 \tan \phi^* \rightarrow I^* = \arctan(2 \tan \phi^*)$$

$$\therefore I^* = \arctan(2 \times \tan 40^\circ) = 59.2^\circ$$

Podemos então determinar a anomalia de campo ΔF ,

$$\Delta F = \Delta H \cos I^* + \Delta Z \sin I^*$$

$$\therefore \Delta F = -298 \times \cos(59.2^\circ) + 0 \times \sin(59.2^\circ) = -153 \text{ nT}$$

Com o intento de determinar o campo geomagnético F^* , começamos com as componentes H^* e Z^* ,

$$Z^* = 2B_0 \sin \phi^* = 2 \times 30,000 \times \sin 40^\circ = 38,570 \text{ nT}$$

$$H^* = B_0 \cos \phi^* = 30,000 \times \cos 40^\circ = 22,980 \text{ nT}$$

Em seguida,

$$F^* = \sqrt{(H^*)^2 + (Z^*)^2} = \sqrt{22,980^2 + 38,570^2} = 44,900 \text{ nT}$$

Finalmente, a razão que buscamos é

$$\left| \frac{\Delta F}{F^*} \right| = \left| \frac{-153}{44,900} \right| = \boxed{3.41 \times 10^{-3}}$$

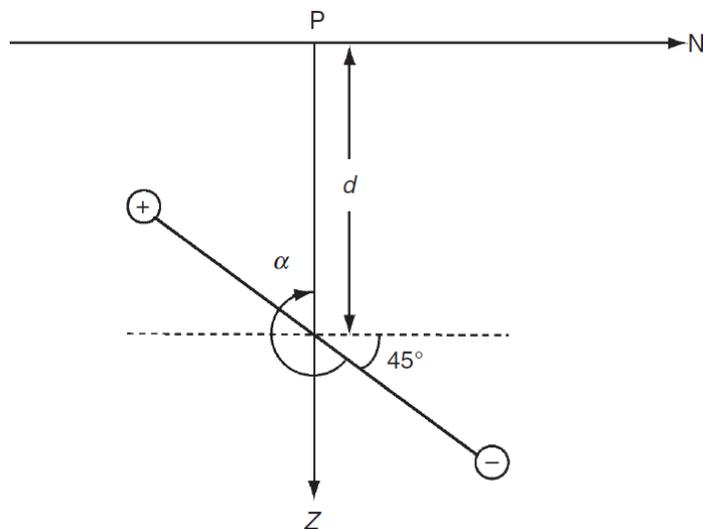
■ Prob. 44

Partes (a) e (b): Começamos com o cálculo da anomalia magnética produzida pelo dipolo, lembrando que $\alpha = 225^\circ$ e $x = 0$ (vide ilustração do problema 42). Observando que a componente horizontal está na direção NS (ΔX), recorreremos às equações do problema 42 e escrevemos

$$\Delta X = -\frac{Cm \sin \alpha}{d^3} = -\frac{1 \times \sin(225^\circ)}{90^3} = 9.70 \times 10^{-7} \text{ T} = 970 \text{ nT}$$

$$\Delta Y = 0$$

$$\Delta Z = \frac{2Cm \cos \alpha}{d^3} = \frac{2 \times 1 \times \cos(225^\circ)}{90^3} = -1.94 \times 10^{-6} \text{ T} = -1940 \text{ nT}$$



Em seguida, para obter as componentes totais do campo terrestre, utilizamos os dados fornecidos na tabela que acompanha o enunciado,

$$F^* = F - \Delta F = 54,900 - (-1310) = 56,210 \text{ nT}$$

$$H^* = H - \Delta H = 12,400 - 625 = 11,780 \text{ nT}$$

$$Z^* = \sqrt{(F^*)^2 + (H^*)^2} = \sqrt{56,210^2 + 11,780^2} = \boxed{57,430 \text{ nT}}$$

Precisamos também da declinação D^* ,

$$\Delta H = \Delta X \cos D^* \rightarrow D^* = \arccos\left(\frac{\Delta H}{\Delta X}\right)$$

$$\therefore D^* = \arccos\left(\frac{625}{970}\right) = 49.8^\circ$$

As componentes X^* e Y^* são

$$X^* = H^* \cos D^* = 11,780 \times \cos(49.8^\circ) = \boxed{7600 \text{ nT}}$$

$$Y^* = H^* \sin D^* = 11,780 \times \sin(49.8^\circ) = \boxed{9000 \text{ nT}}$$

A declinação D' observada é

$$\tan D' = \frac{Y^* + \Delta Y}{X^* + \Delta X} = \frac{9000 + 0}{7600 + 970}$$

$$\therefore D' = \arctan\left(\frac{9000 + 0}{7600 + 970}\right) = 46.4^\circ$$

O desvio da bússola em razão do norte geomagnético é $D^* - D' = 49.8^\circ - 46.4^\circ = 3.4^\circ$.

Parte (c): Utilizando as componentes vertical e horizontal do campo magnético, podemos calcular a latitude geomagnética ϕ^* do ponto,

$$Z^* = 2B_0 \sin \phi^*$$

$$H^* = B_0 \cos \phi^*$$

$$\therefore \tan \phi^* = \frac{Z^*}{2H^*} = \frac{57,430}{2 \times 11,780} = 2.44$$

$$\therefore \phi^* = \arctan(2.44) = \boxed{67.7^\circ}$$

Temos a latitude ϕ^* , a declinação D^* e as coordenadas geográficas ($\phi = 52^\circ$, $\lambda = 35^\circ$) do ponto de interesse. Recorrendo ao triângulo esférico mostrado ao fim da solução, podemos calcular as coordenadas do polo norte geomagnético,

$$\cos(90^\circ - \phi_B) = \cos(90^\circ - \phi^*) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \phi^*) \sin(90^\circ - \phi) \cos D^*$$

$$\therefore \sin \phi_B = \sin \phi^* \sin \phi + \cos \phi^* \cos \phi \cos D^*$$

$$\therefore \sin \phi_B = \sin 67.7^\circ \sin 52^\circ + \cos 67.7^\circ \cos 52^\circ \cos 49.8^\circ$$

$$\therefore \sin \phi_B = 0.880$$

$$\therefore \phi_B = \arcsin(0.880) = \boxed{61.6^\circ}$$

Aplicando a lei dos cossenos uma segunda vez, temos

$$\cos(90^\circ - \phi^*) = \cos(90^\circ - \phi_B) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \phi_B) \sin(90^\circ - \phi) \cos(\lambda - \lambda_B)$$

$$\therefore \sin \phi^* = \sin \phi_B \sin \phi + \cos \phi_B \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_B)$$

$$\therefore \cos(\lambda - \lambda_B) = \frac{\sin \phi^* - \sin \phi_B \sin \phi}{\cos \phi_B \cos \phi}$$

$$\therefore \cos(\lambda - \lambda_B) = \frac{\sin(67.7^\circ) - \sin(61.6^\circ) \sin(52^\circ)}{\cos(61.6^\circ) \cos(52^\circ)}$$

$$\therefore \cos(\lambda - \lambda_B) = 0.792$$

$$\therefore \lambda - \lambda_B = \arccos(0.792) = \pm 37.6^\circ$$

A solução correta é a negativa, -37.6° , pois uma declinação magnética positiva implica que o ponto está a oeste do polo norte geomagnético. Assim sendo,

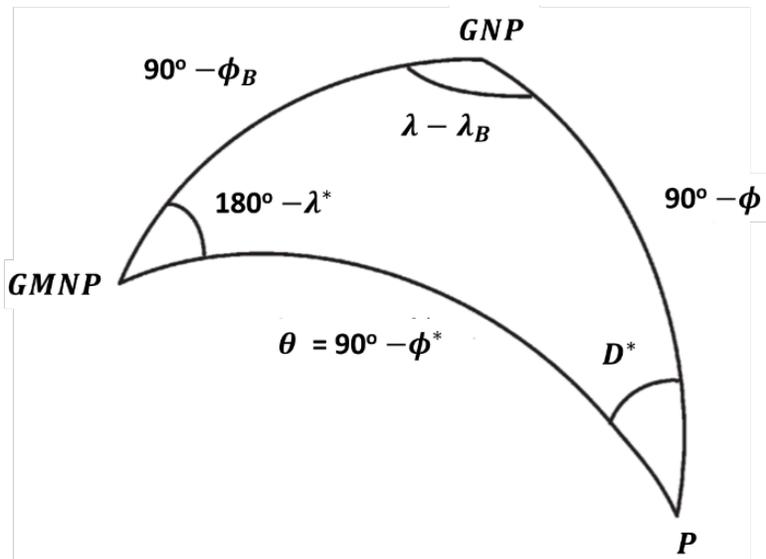
$$D^* > 0 \rightarrow \lambda - \lambda_B < 0$$

$$\therefore \lambda - \lambda_B = -37.6^\circ$$

$$\therefore -35^\circ - \lambda_B = -37.6^\circ$$

$$\therefore -\lambda_B = -2.6^\circ$$

$$\therefore \boxed{\lambda_B = 2.6^\circ}$$



■ Prob. 45

Parte (a): Primeiramente, determinamos a latitude geomagnética correspondente ao ponto P,

$$\sin \phi^* = \sin \phi_B \sin \phi + \cos \phi_B \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_B)$$

$$\therefore \sin \phi^* = \sin 60^\circ \sin 40^\circ + \cos 60^\circ \cos 40^\circ \cos (25^\circ - 0)$$

$$\therefore \sin \phi^* = 0.904$$

$$\therefore \phi^* = \arcsin(0.904) = 64.7^\circ$$

Prosseguimos ao cálculo das componentes geomagnéticas Z^* e H^* e do campo total F^* , quais sejam,

$$Z^* = 2B_0 \sin \phi^* = 2 \times 30,000 \times \sin(64.7^\circ) = 54,250 \text{ nT}$$

$$H^* = B_0 \cos \phi^* = 30,000 \times \cos(64.7^\circ) = 12,820 \text{ nT}$$

$$F^* = \sqrt{(H^*)^2 + (Z^*)^2} = \sqrt{12,820^2 + 54,250^2} = 55,740 \text{ nT}$$

A declinação geomagnética é

$$\sin D^* = \frac{-\cos \phi_B \sin(\lambda - \lambda_B)}{\cos \phi^*} = \frac{-\cos 60^\circ \times \sin(26^\circ - 0^\circ)}{\cos 64.7^\circ} = -0.513$$

$$\therefore D^* = \arcsin(-0.513) = -30.9^\circ$$

e a inclinação geomagnética, por sua vez, é

$$\tan I^* = 2 \tan \phi^* \rightarrow I^* = \arctan(2 \tan \phi^*)$$

$$\therefore I^* = \arctan(2 \tan 64.7^\circ) = 76.7^\circ$$

A anomalia magnética produzida pelo dipolo é dada pelas equações

$$\Delta X = -\frac{Cm \sin \alpha}{d^3} = \frac{-1 \times \sin(45^\circ)}{90^3} = -9.70 \times 10^{-7} \text{ T} = -970 \text{ nT}$$

$$\Delta Y = 0$$

$$\Delta Z = \frac{2Cm \cos \alpha}{d^3} = \frac{2 \times 1 \times \cos(45^\circ)}{90^3} = 1.94 \times 10^{-6} \text{ T} = 1940 \text{ nT}$$

As anomalias de campo ΔH e ΔF são tais que

$$\Delta H = \Delta X \cos D^* = -970 \times \cos(-30.9^\circ) = -832 \text{ nT}$$

$$\Delta F = \Delta H \cos I^* + \Delta Z \sin I^* = -832 \times \cos(76.7^\circ) + 1940 \times \sin(76.7^\circ) = 1700 \text{ nT}$$

Conforme solicitado, determinamos Z , F e H ,

$$Z = Z^* + \Delta Z = 54,250 + 1940 = \boxed{56,190 \text{ nT}}$$

$$F = F^* + \Delta F = 55,740 + 1700 = \boxed{54,440 \text{ nT}}$$

$$H = H^* + \Delta H = 12,820 - 832 = \boxed{11,990 \text{ nT}}$$

Parte (b): Para calcular a direção para a qual a bússola é dirigida, precisamos do valor da declinação D' considerando os efeitos do campo geomagnético e do dipolo subterrâneo,

$$\tan D' = \frac{Y}{X} = \frac{Y^* + \Delta Y}{X^* + \Delta X}$$

Aqui temos $Y^* = H^* \sin D = 12,820 \times \sin(-30.9^\circ) = -6580 \text{ nT}$ e $X^* = H^* \cos D = 12,820 \times \cos(-30.9^\circ) = 11,000 \text{ nT}$, logo,

$$\tan D' = \frac{-6580 + 0}{11,000 + (-970)} = -0.656$$

$$\therefore D' = \arctan(-0.656) = \boxed{-33.3^\circ}$$

■ Prob. 46

Se a atmosfera é isotérmica, os perfis de pressão e densidade são semelhantes e podemos escrever a lei de potência

$$\rho(r) = \rho_E \exp\left[-\frac{(r - R_E)}{H}\right]$$

Supondo que a atmosfera da Terra é composta de finas cascas esféricas de raio r e espessura dr , podemos afirmar que cada casca possui massa $dM = 4\pi r^2 \rho_E dr$ e a massa M total da atmosfera torna-se

$$M = 4\pi\rho_E \int_{R_E}^{\infty} r^2 e^{-r/H} dr$$

Perceba que a integral que preparamos se estende do raio de superfície terrestre, R_E , até o infinito. Para avaliar essa integral imprópria, utilizamos a substituição $x = (r - R_E)/H$, de modo que $dr = Hdx$ e $r = Hx + R_E$, logo

$$M = 4\pi\rho_E \int_0^{\infty} (Hx + R_E)^2 e^{-x} H dx$$

$$\therefore M = 4\pi\rho_E \left[H^3 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx + 2H^2 R_E \int_0^{\infty} x e^{-x} dx + HR_E^2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right] \quad \text{(I)}$$

Avaliando as integrais do lado direito, temos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left(e^{-x} \right) \Big|_{x=0}^{\infty} = 1$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = e^{-x} (-x - 1) \Big|_{x=0}^{\infty} = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{x^2 e^{-x}}{-1} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 2$$

Substituindo em **(I)**,

$$\therefore M = 4\pi\rho_E \left(2H^3 + 2H^2 R_E + HR_E^2 \right)$$

Usando $H \ll R$ (isto é, a altura de escala $H \approx 8$ km é muito menor que o raio terrestre), podemos reescrever a expressão acima como

$$M = 4\pi\rho_E \left(2H^3 + 2H^2R_E + HR_E^2 \right) \approx 4\pi\rho_E HR_E^2 \quad \text{(II)}$$

A equação de estado para um gás ideal é $\rho_E = p\mu m_p/k_B T$ onde ρ_E é a densidade, $p \approx 101,325$ Pa é a pressão atmosférica ao nível do mar, $\mu \approx 29$ é a massa molar média dos gases que compõem a atmosfera, $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27}$ g é a massa de um próton, $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann e $T = 290$ K é a temperatura fornecida no enunciado. Substituindo os valores pertinentes, vem

$$\rho_E = \frac{P\mu m_p}{k_B T} = \frac{101,325 \times 29 \times (1.67 \times 10^{-27})}{(1.38 \times 10^{-23}) \times 290} = 1.23 \text{ kg/m}^3$$

Esse valor de densidade está próximo da estimativa $\rho_E \approx 1.225$ kg/m³ ocasionalmente utilizada em aplicações de engenharia. Por fim, substituímos as variáveis pertinentes em **(II)** para obter

$$M = 4\pi\rho_E HR_E^2 = 4\pi \times 1.23 \times 8000 \times (6370 \times 10^3)^2 = \boxed{5.0 \times 10^{18} \text{ kg}}$$

Lembrando que a massa da Terra é $M_E \approx 6.0 \times 10^{24}$ kg, temos a fração

$$\frac{M}{M_E} = \frac{5.0 \times 10^{18}}{6.0 \times 10^{24}} = 8.33 \times 10^{-7}$$

A massa da atmosfera é cerca de um milhão de vezes menor que a massa da Terra propriamente dita.

Solução alternativa. Uma solução alternativa (e mais rápida) consiste em observar que a força exercida por toda a atmosfera na superfície da Terra é $F = P \times A = Mg$, onde A é a área da superfície terrestre e g é a aceleração gravitacional no centro da Terra. Nesse caso, encontramos

$$F = PA = Mg \rightarrow M = \frac{PA}{g}$$

$$\therefore M = \frac{PA}{g} = \frac{P}{g} \times 4\pi R_E^2 = \frac{101,325}{9.81} \times 4\pi \times (6370 \times 10^3)^2 = 5.3 \times 10^{18} \text{ kg}$$

Como esperado, o valor obtido é semelhante àquele da solução inicial.

■ Prob. 47

Lembrando que 1 grau de latitude é aproximadamente igual a 111 km, segue que 30° são aproximadamente equivalentes a 3330 km. A deriva convectiva ao longo da calota polar é

$$V_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{E}{B} = \frac{50 \times 10^{-3}}{0.5 \times 10^{-4}} = 1000 \text{ m/s} = 1 \text{ km/s}$$

Segue que o tempo necessário para que o plasma cruze a calota polar é cerca de 3330 sec. Nesse mesmo intervalo de tempo, o vento solar, deslocando-se a 500 km/s, terá percorrido $3330 \times 500 = 1.67 \times 10^6$ km, o que equivale a $\approx 1.67 \times 10^6 / 6370 = 262$ raios terrestres. Essa é uma estimativa do comprimento da cauda magnetosférica.

■ Prob. 48

Não existe choque em arco à frente da lua porque não há deflexão dos ventos solares que incidem sobre a lua. As partículas são absorvidas pela superfície lunar. Se o campo magnético interplanetário se propagasse em conjunção com o escoamento de ventos solares e fosse completamente absorvido pela lua, então a pressão de campo magnético $B_c^2/2\mu_0$ na cavidade formada a jusante da lua seria igual à pressão total do vento solar. Sendo o parâmetro beta do plasma igual a 3, tem-se que a pressão térmica no vento solar é 3 vezes a pressão magnética. Se a pressão magnética na cavidade lunar deve ser igual à pressão do plasma mais a pressão do campo magnético, então o campo magnético na cavidade deve ser duas vezes mais intenso para ter quatro vezes a pressão a montante. Sendo o raio da cavidade magnética $\sqrt{1/2} \approx 0.71$ vezes o raio lunar, o campo magnético na cavidade terá sua intensidade dobrada e o balanço apropriado de pressões será obtido.

■ Prob. 49

Primeiramente, determinamos o módulo da deriva eletromagnética $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$,

$$V_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{E}{B} = \frac{10 \times 10^{-3}}{0.5 \times 10^{-4}} = 200 \text{ m/s}$$

Em seguida, consideramos a deriva diamagnética iônica,

$$V_{\text{dia}} = \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{q_i n_i B^2}$$

Lembrando que a pressão térmica do plasma é dada por $p = n_i k_B T_i$, e a densidade é suposta constante,

$$V_{\text{dia}} = \frac{\cancel{n_i} k_B \nabla T_i \cancel{B}}{q_i \cancel{n_i} B^2} = \frac{k_B \nabla T_i}{q_i B}$$

$$\therefore V_{\text{dia}} = \frac{(1.38 \times 10^{-23}) \times 200}{(1.6 \times 10^{-19}) \times (0.5 \times 10^{-4})} = 345 \text{ m/s}$$

Verifica-se que a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e a deriva diamagnética iônica têm a mesma ordem de magnitude. No que concerne ao efeito termoelétrico, 11,600 K são necessários para

atribuir 1 eV de energia. Portanto, a variação de temperatura ao longo de 10 km sob um campo elétrico de 10 mV/m é tal que

$$(\Delta T_i) = 10 \text{ mV/m} \times 10 \text{ km} = 100 \text{ eV} = 1,160,000 \text{ K}$$

Esse valor pouco realista ilustra o quão grande são os campos elétricos quando comparados com variações de temperatura.

■ Prob. 50

Temos $n = 10^5 \text{ cm}^{-3} = 10^{11} \text{ m}^{-3}$ e $E_y = 50 \text{ mV/m}$; ademais, sabemos que $\sigma_H \gg \sigma_P$ na região E. Portanto, no referencial fixo na Terra,

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

Fazendo $U = 0$ e usando o tensor de condutividades,

$$J_x = -\sigma_H E_y$$

$$\therefore J_x = -\frac{ne}{B} E_y$$

$$\therefore J_x = -\frac{10^{11} \times (1.6 \times 10^{-19})}{0.5 \times 10^{-4}} \times (50 \times 10^{-3}) = -1.6 \times 10^{-5} \text{ A/m}^2$$

Isso corresponde a uma corrente para oeste em resposta à deriva para leste $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Portanto, no presente caso a corrente é transportada pelos elétrons, porquanto os íons estão estacionários em decorrência do pequeno valor de κ_i (=razão entre girofrequência e frequência de colisões). Os íons estão atrelados aos neutros e os neutros foram supostos estacionários ($U = 0$).

Prosseguimos ao referencial que se move com a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Usando um apóstrofo (') para denotar grandezas que se movem com o referencial, temos $\mathbf{V}'_e = 0$ (o subscrito 'e' denota elétrons) e $\mathbf{V}'_i = -(E_y/B)\mathbf{x}$ (o subscrito 'i' denota íons). Portanto,

$$\mathbf{J}' = ne(\mathbf{V}'_i - \mathbf{V}'_e)$$

$$\therefore J'_x = ne \left(-\frac{E_y}{B} \right)$$

$$\therefore J'_x = -\sigma_H E_y$$

$$\therefore J'_x = J_x$$

Verifica-se que, movendo-se com os elétrons, os íons deslocam-se para oeste, o que indica a existência de uma corrente para oeste com a mesma magnitude que aquela exibida no referencial fixo analisado anteriormente. Em outras palavras, temos um vento

neutro com magnitude E_y/B deslocando-se na direção oeste. Nesse caso, a corrente é transportada pelos íons.

■ Prob. 51

Há 4 derivas horizontais a considerar: a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ($V_{E \times B}$); a deriva gravitacional (V_g); a deriva de gradiente de pressão ($V_{\nabla p}$); e a deriva gravitacional de Pedersen (V_{σ_P}). A deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ é decorrente do campo elétrico vertical para baixo e direciona-se zonalmente para leste,

$$V_{E \times B} = \frac{E_z}{B_y} = \frac{2 \times 10^{-3}}{0.25 \times 10^{-4}} = 80 \text{ m/s}$$

A deriva gravitacional também é para leste e, usando uma massa molecular média de 17.5 amu, torna-se

$$V_g = \frac{Mg}{eB} = \frac{[17.5 \times (1.67 \times 10^{-27})] \times 9}{(1.6 \times 10^{-19}) \times (0.25 \times 10^{-4})} = 0.0658 \text{ m/s}$$

Como o gradiente de pressão é voltado para cima, a deriva ∇P também é voltada para leste. A deriva diamagnética em questão é dada por

$$V_{\nabla P} = -\frac{k_B T}{e} \frac{\frac{\nabla n}{n} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

ou, em termos do comprimento de escala L ,

$$V_{\nabla P} = -\frac{k_B T}{eLB} = -\frac{(1.38 \times 10^{-23}) \times 1000}{(1.6 \times 10^{-19}) \times 20,000 \times (0.25 \times 10^{-4})} = -0.173 \text{ m/s}$$

Por fim, a deriva horizontal de Pedersen também é voltada para leste (pois deve-se ao pequeno componente de campo elétrico E_{east}). Os elétrons estão magnetizados, então a corrente é carregada inteiramente pelos íons, logo,

$$J = neV_{\sigma_P}$$

$$J = \sigma_P E_{\text{east}}$$

Igualando as duas expressões e resolvendo para V_{σ_P} ,

$$J = neV_{\sigma_P} = \sigma_P E_{\text{east}} \rightarrow V_{\sigma_P} = \frac{\sigma_P E_{\text{east}}}{ne} \quad \text{(I)}$$

Podemos substituir a condutividade de Pedersen pela expressão

$$\sigma_P \approx \frac{nMv_{in}}{B^2}$$

Substituindo em **(I)**,

$$V_{\sigma_P} = \frac{\sigma_P E_{\text{east}}}{ne} = \frac{\cancel{n}Mv_{in}}{B^2} \times \frac{E_{\text{east}}}{\cancel{n}e}$$

$$\therefore V_{\sigma_P} = \frac{Mv_{in}E_{\text{east}}}{eB^2} \quad \text{(II)}$$

A frequência de colisões, usando a densidade de neutros $n_n = 3.8 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$, pode ser obtida através da correlação

$$v_{in} \approx 2.6 \times 10^{-9} n_n A^{-1/2} = 2.6 \times 10^{-9} \times (3.8 \times 10^8) \times 17.5^{-1/2} = 0.236 \text{ s}^{-1}$$

Substituindo em **(II)**,

$$V_{\sigma_P} = \frac{\left[17.5 \times (1.67 \times 10^{-27}) \right] \times 0.236 \times (0.5 \times 10^{-3})}{(1.6 \times 10^{-19}) \times (0.25 \times 10^{-4})^2} = 0.0345 \text{ m/s}$$

Por fim, observa-se que, na ionosfera equatorial modelada no presente problema, a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ($\approx 80 \text{ m/s}$) é muito maior que a deriva gravitacional ($\approx 0.066 \text{ m/s}$), a deriva ∇P ($\approx 0.17 \text{ m/s}$) e a deriva de Pedersen ($\approx 0.035 \text{ m/s}$).

■ Prob. 52

Na ionopausa $h = h_{ip}$ do planeta X, a pressão térmica é dada por

$$P_{ip} = nk_B T = k_B T \times 10^5 \exp\left(\frac{-(h_{ip} - h_0)}{H_p}\right)$$

Aplicando logaritmos e resolvendo para h_{ip} , vem

$$\ln P_{ip} = \ln \left[k_B T \times 10^5 \exp\left(\frac{-(h_{ip} - h_0)}{H_p}\right) \right]$$

$$\therefore \ln P_{ip} = \ln(10^5 k_B T) - \frac{(h_{ip} - h_0)}{H_p}$$

$$\therefore \ln(10^5 k_B T) - \ln P_{ip} = \frac{(h_{ip} - h_0)}{H_p}$$

$$\therefore H_p \ln\left(\frac{10^5 k_B T}{P_{ip}}\right) = h_{ip} - h_0$$

$$\therefore h_{ip} = H_p \ln\left(\frac{10^5 k_B T}{P_{ip}}\right) + h_0$$

Substituindo os valores pertinentes,

$$h_{ip} = 50 \times \ln\left(\frac{(10^5 \times 10^6) \times (1.38 \times 10^{-23}) \times 10^5}{3 \times 10^{-9}}\right) + 130 = \boxed{321 \text{ km}}$$

(O fator 10^6 que acompanha o termo 10^5 é utilizado para converter a densidade numérica do plasma de cm^{-3} para m^{-3} .) O resultado indica que a ionopausa está a uma altitude de aproximadamente 320 km. A pressão obtida está próxima do valor que seria produzido por um plasma de densidade 10 cm^{-3} e velocidade 400 km/s no ponto subsolar. Se a pressão fosse reduzida para **1 nPa**, teríamos

$$h_{ip} = 50 \times \ln\left(\frac{(10^5 \times 10^6) \times (1.38 \times 10^{-23}) \times 10^5}{1 \times 10^{-9}}\right) + 130 = 376 \text{ km}$$

Isso corresponderia, por exemplo, a uma redução na densidade de vento solar por um fator $\times 1/3$. Se, por outro lado, tivéssemos um aumento na pressão para 10 nPa, obter-se-ia $h_{ip} \approx 261 \text{ km}$. As alterações são relativamente pequenas porque o planeta "X" em foco possui uma altura de escala H_p pequena. Se, por outro lado, H_p fosse igual a 100 km (ou seja, duas vezes maior), o h_{ip} correspondente a 10 nPa saltaria de 261 km no caso anterior para 392 km no caso presente.

■ **Referências** (★ → Livro altamente recomendado)

● (Alguns livros foram consultados apenas na elaboração da parte 1.)

1. Buforn, E. P., Pro, C., & Udías, A. (2012). *Solved Problems in Geophysics*: Cambridge University Press. ★
2. Burger, H. R., Sheehan, A. F., & Jones, C. H. (2006). *Introduction to Applied Geophysics*: W.W. Norton and Company.
3. Fowler, C. M. R. (2004). *The Solid Earth – An Introduction to Global Geophysics* (2 ed.): Cambridge University Press.
4. Howard, T. (2014). *Space Weather and Coronal Mass Ejections*: Springer.
5. Kelley, M. C. (2009). *The Earth's Ionosphere – Plasma Physics and Electrodynamics* (Vol. 96): Academic Press. ★
6. Lowrie, W., & Fichtner, A. (2020). *Fundamentals of Geophysics* (3 ed.): Cambridge University Press. ★
7. Philpotts, A. R., & Ague, J. J. (2022). *Principles of Igneous and Metamorphic Petrology*: Cambridge University Press.
8. Russell, C. T., Luhmann, J. G., & Strangeway, R. J. (2016). *Space Physics – An Introduction*: Cambridge University Press.
9. Ryden, B., & Peterson, B. M. (2010). *Foundations of Astrophysics*: Addison-Wesley.
10. Shearer, P. M. (2009). *Introduction to Seismology* (2 ed.): Cambridge University Press.
11. Stacey, F. D., & Davis, P. M. (2008). *Physics of the Earth* (4 ed.): Cambridge University Press.

➔ **Referências de cada problema**

Problema	Ref.	Problema	Ref.
29	[6]	41	[1]
30	[6]	42	[1]
31	[1]	43	[1]
32	[11]	44	[1]
33	[7]	45	[1]
34	[7]	46	[9]
35	-	47	[8]
36	[6]	48	[8]
37	[6]	49	[5]
38	[6]	50	[5]
39	[6]	51	[5]
40	[6]	52	[8]

■ Sobre mim



Sou aluno de graduação em Engenharia Civil na Universidade de Brasília (UnB). Meus principais interesses são hidrologia, engenharia hidráulica, fluidodinâmica, engenharia ambiental, geotecnia e métodos geofísicos. Tenho proficiência certificada em sete idiomas e busco me posicionar na comunidade brasileira de engenheiros e especialistas em infraestrutura.

WhatsApp: (61) 981247059

Email: lucas_0150@hotmail.com

